# Retningslinjer for bedømmelsen
# Georg Mohr-Konkurrencen 2019
# 2. runde

Besvarelser som falder uden for de løsninger som ligger til grund for pointskemaerne, bedømmes ved analogi så skridt med tilsvarende vægt i den samlede løsning får tilsvarende point.

## Opgave 1

- 1 point for at indskrænke mulighederne til højst 30 forskellige tal.
- 2 point for at indskrænke mulighederne til højst 20 forskellige tal.
- 3 point for at indskrænke mulighederne til højst 10 forskellige tal.
- 4 point for at vise at tallet 2019 og ingen andre opfylder betingelsen.

*Bemærkning:* At tallet højst er 2029 kræver ikke argument.

## Opgave 2

- 3 point for at vise at hvis ligningerne har en fælles løsning, er $a+b=-2^{2018}$. Herindenfor kan der gives følgende delpoint, som ikke kan lægges sammen.
  - 1 point for at eliminere $x^{2019}$ af ligningerne eller i begge ligninger erstatte dette led med en variabel.
  - 2 point for at vise at eneste mulighed for en eventuel fælles løsning er $x=2$.
- 1 point for at vise at ligningerne har en fælles løsning hvis $a+b=-2^{2018}$. Dette point gives også hvis blot rækken af skridt der fører til $a+b=-2^{2018}$, ses tydeligt at kunne vendes om med det resultat at ligningerne har en fælles løsning når det gælder.

## Opgave 3

- 3 point for at vise at der højst er to forskellige tal. Herindenfor kan der gives følgende delpoint, som ikke kan lægges sammen.
  - 1 point for at se på par af summer af fem af tallene som kun adskiller sig i ét led.
  - 2 point for at vise at hvis $a \geq b \geq c$ er tre af de syv tal, så går $a$ op i $b - c$. Det er tiltrækkeligt at dette bliver vist i det tilfælde hvor $a$ ikke er mindre end noget af de øvrige seks tal.
- 1 point for et eksempel på syv tal som ikke alle er ens, og som opfylder beskrivelsen.

## Opgave 4

I det følgende er dagene nummereret $0, 1, \ldots,$ tallet på tavlen efter dag $n$ betegnet med $a_n$ og dette tals sidste ciffer med $c_n$.

Følgende er fælles for nedenstående pointskemaer.

- 1 indledende point for at nævne at hvis sidste ciffer i et tal er større end 5, så er sidste ciffer i 9 gange tallet mindre end 5. Dette point opnås også hvis det nævnes at hvis sidste ciffer i et tal er større end 5, så er sidste ciffer i 9 gange tallet højst 5.
- 1 afsluttende point for at påvise at hvad der er vist indtil da, fører til en modstrid hvis tavlen aldrig bliver tom.

Hvordan de midterste 2 point tildeles, afhænger af løsningsforsøgets strategi.

*a. Delfølge*

- 1 point for at indføre delfølgen af de $a_n$ som opfylder $c_n \leq 5$, og påvise at den er uendelig hvis hele følgen er det.
- Endnu 1 point for at vise at delfølgen er aftagende.

*Bemærkning:* Deltageren behøver ikke formelt tale om delfølger men kan fx se på rækken af tal på tavlen med $c_n \leq 5$.

*b. Mindste $a_n$*

- 1 point for at begrunde at hvis det er muligt at tavlen aldrig bliver tom, så findes der et mindste $a_n$ der kan indgå i en sådan uendelig følge, eller et mindste $a$ som frembringer en sådan uendelig følge.
- 1 point for at vise at hvis $a_n$ ikke er det sidste tal på tavlen, så gælder det om enten $a_{n+1}$ eller $a_{n+2}$ at det findes og er mindre end $a_n$. Det er tilstrækkeligt at vise dette specifikt for det $a_n$ (eventuelt $a_0 = a$) som er nævnt i det forrige punkt.

*c. Opad begrænsning af $a_n$*

- 1 point for at indføre en funktion af $n$ med grænseværdi 0 for $n \to \infty$ og udtrykke hensigt om at påvise at den begrænser $a_n$ opad.
- Endnu 1 point for at bevise den nævnte begrænsning.

*Bemærkning:* Et eksempel på en funktion $f$ så $f(n) \geq a_n$, kan være $f(n) = 10a(\frac{9}{10})^{\frac{n}{2}}$.

## Opgave 5

Der gives følgende point.

*a) Brug af ét af linjestykkerne $EB$ og $FC$*

Det følgende forudsætter af linjestykket $BE$ benyttes. Skemaet finder tilsvarende anvendelse hvis $CF$ benyttes.

- 1 point for at indføre linjestykket $EB$.
- 1 point for at vise $|AD| = |EB|$ eller nævne som kendt at når ligesidede trekanter $BCD$ og $ACE$ ligger udvendigt på siderne af en trekant $ABC$, så er $|AD| = |EB|$.
- 2 point for at vise $|EF| = |EB|$ . Heraf gives der 1 point for ét af følgende. Disse point kan ikke lægges sammen.
  - Vise $\angle EAF = 150°$.
  - Udlede en sammenhæng mellem $|EB|^2$ og $|EF|^2$ udtrykt ved sider og vinkler i trekant $ABC$ uden nogen antagelse om vinklerne.

*b) Spejling i $AB$ eller $AC$*

Det følgende forudsætter at der spejles i $AB$. Skemaet anvendes tilsvarende hvis der spejles i $AC$.

- 1 point for at indføre spejlbillederne $E'$ og $F'$ af $E$ og $F$ i linjen $AB$.
- 1 point for at vise $\angle EAE' = 60°$.
- Endnu 1 point for at vise at $AE'$ og $F'D$ fås ved drejninger af $AC$ henholdsvis $120°$ om $A$ og $60°$ om $B$ i modsatte retninger.
- 1 point for at udlede heraf at $|EF| = |AD|$.

*c) Koordinatregning*

- 1 point for at indføre et egnet koordinatsystem, for eksempel sætte $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$ og $C = (0, b)$.
- Endnu 1 point for at beregne koordinaterne til dem af punkterne $A$, $D$, $E$ og $F$ som ikke indgår i koordinatsystemets definition.
- Herefter 1 point for hvert af følgende:
  - Beregne $\overrightarrow{AD}$ eller $|AD|$.
  - Beregne $\overrightarrow{EF}$ eller $|EF|$.

*Bemærkning:* Ét af de to sidste point fås kun hvis det også på grundlag af resultaterne vises at $|AD| = |EF|$.

*d) Beregning af $|AD|^2$ og $|EF|^2$ uden brug af koordinater*

- 2 point for at udtrykke $|AD|^2$ eller $|EF|^2$ ved to sider eller en side og en ikke ret vinkel i trekant $ABC$.
  - Heraf får man 1 point for at udtrykke $|AD|^2$ eller $|EF|^2$ ved trekantens sider og vinkler uden nogen antagelse om vinklerne.
- 2 point for at udtrykke den anden af de to størrelser ved det samme par af to sider eller en side og en ikke ret vinkel i trekant $ABC$ og påvise at de to opnåede udtryk er identiske.
  - Heraf får man 1 point for at udtrykke størrelsen ved trekantens sider og vinkler uden nogen antagelse om vinklerne.

*e) Brug af fermatpunkt*

- 1 point for at indføre trekant $ABC$'s fermatpunkt $P$ (karakteriseret for en vilkårlig trekant hvor alle vinkler er mindre end 120°, ved $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$) og bevise eller anføre som kendt at linjerne $AD$, $BE$ og $CF$ går gennem $P$, og at $|AD| = |BE| = |CF| = |PA| + |PB| + |PC|$.
- 1 point for at udtrykke $|EF|^2$ ved $|PA|$, $|PB|$ og $|PC|$ uden anden antagelse om vinklerne i trekant $ABC$ end at de alle er mindre end 120°.
- 1 point for at udlede en sammenhæng mellem $|PA|$, $|PB|$ og $|PC|$ som udtrykker at $\angle A = 90°$.
- 1 point for at udlede af disse resultater at $|EF|^2 = (|PA|+|PB|+|PC|)^2$, og konkludere at $|EF| = |AD|$.

*Bemærkning:* Det fælles punkt for $AD$, $BE$ og $CF$ kendes også i litteraturen som det første isogoniske punkt.