Løsninger til Georg Mohr-Konkurrencen 2019
2. runde

Opgave 1 Et tal der opfylder kravet, må mindst være $2029 - 27 = 2002$ (da summen af tre cifre højst kan være $3 \cdot 9 = 27$) og kan højst være 2029. De tre første cifre må så være enten 200, 201 eller 202. Hvis x er sidste ciffer, er tallet enten $2000 + x$, $2010 + x$ eller $2020 + x$, og dermed må enten $2000 + x + x$, $2010 + x + 1 + x$ eller $2020 + x + 2 + x$ være lig med 2029. Da kun det midterste af disse tal er ulige, må vi have $2011 + 2x = 2029$ og dermed $x = 9$. Altså er 2019 det eneste mulige tal. Og 2019 opfylder faktisk kravet, idet $2019 + 0 + 1 + 9 = 2029$.

Opgave 2 Hvis tallet x er løsning til begge ligninger, er x også løsning til den ligning der fremkommer ved at trække den sidste ligning fra den første, altså $ax - bx + 2b - 2a = 0$. Denne ligning er ensbetydende med $(a - b)x = 2(a - b)$. Da a og b er forskellige, kan vi dividere med $a - b \neq 0$, hvilket giver $x = 2$. Indsættes dette i en af de oprindelige ligninger, fås $2^{2019} + 2a + 2b = 0$, hvoraf $a + b = -\frac{2^{2019}}{2} = -2^{2018}$. Tallet -2^{2018} er altså den eneste mulighed for $a + b$.

Omvendt kan vi se at når $a + b = -2^{2018}$, så *har* de to ligninger faktisk en fælles løsning (nemlig $x = 2$) uanset værdien af a og b: Ved indsættelse af $x = 2$ lyder begge ligninger $2^{2019} + 2a + 2b = 0$, og dette er sandt når $a + b = -2^{2018}$.

Opgave 3 Tallene 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5 opfylder betingelsen, hvilket viser at der *kan* være to forskellige tal blandt de syv. Vi beviser nu at der ikke kan være mere end to forskellige tal.

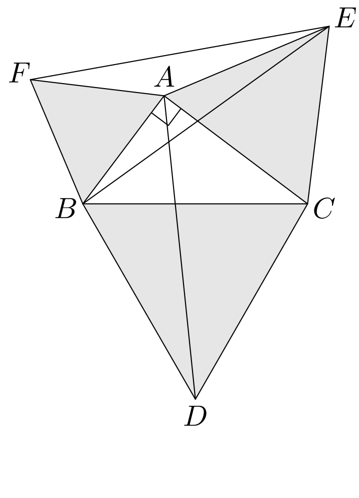
Kald tallene x_1, x_2, ..., x_7. Da x_1 går op i $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ og i $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$, vil x_1 også gå op i $(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = x_2 - x_7$. På tilsvarende måde ses at ethvert af tallene går op i differensen mellem to vilkårlige andre af tallene. Antag nu at der findes tre forskellige tal med $a < b < c$. Så vil c gå op i $b - a$, hvilket er umuligt fordi $b - a$ er positiv og mindre end c. Der er altså højst to forskellige tal på papiret.

Opgave 4 Svaret er nej. Vi fører beviset indirekte ved at antage at et sådant tal findes, og viser at denne antagelse fører til en modstrid. Antag altså at der findes starttal så tavlen aldrig bliver tom. Lad a_0 betegne det mindst mulige tal som aldrig fører til en tom tavle, og kald de følgende dages tal a_1, a_2 osv. Da a_0 aldrig fører til en tom tavle, må a_1, a_2 osv. nødvendigvis have samme egenskab.

Hvis tallet a_0 ender på 0, 1, 2, 3, 4 eller 5, vil a_1 fremkomme ved at slette slutcifferet og derfor være mindre end a_0, i modstrid med at a_0 var det mindste tal med egenskaben.

Hvis a_0 ender på 6, 7, 8 eller 9, vil a_1 være $9 \cdot a_0$. Da cifrene 6, 7, 8 eller 9 ganget med 9 ender på henholdsvis 4, 3, 2 eller 1, vil a_1 ende på et af disse cifre. Det betyder at a_2 fremkommer af a_1 ved at fjerne slutcifferet d, hvilket kan udtrykkes således: $a_2 = \frac{a_1 - d}{10} = \frac{9 \cdot a_0 - d}{10}$. Heraf fås $a_2 \leq \frac{9 \cdot a_0}{10} < a_0$. Så i dette tilfælde har vi fundet at a_2 er mindre end a_0, hvorved vi igen har opnået en modstrid med at a_0 var det mindste tal med den angivne egenskab.

Opgave 5



Bemærk først at $\angle EAB = 90° + 60° = 150°$ og dermed (se på vinklerne omkring A) $\angle EAF = 360° - 60° - 150° = 150°$. Bemærk også at $|AF| = |AB|$. Ved en spejling om EA føres trekant EAF derfor over i trekant EAB, og dermed er $|EF| = |EB|$.

Ved en drejning om C på 60° i positiv omløbsretning føres CE over i CA, og CB føres over i CD. Trekant ECB føres derfor over i trekant ACD, og dermed er $|EB| = |AD|$.

Alt i alt fås $|AD| = |EF|$ som ønsket.