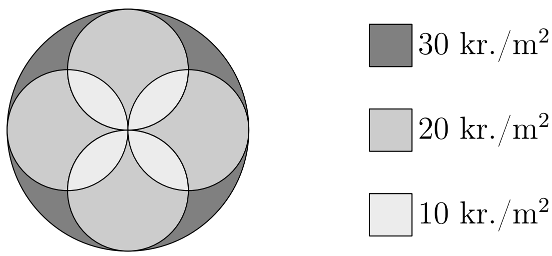
Løsninger til Georg Mohr-Konkurrencen 2018
2. runde

Opgave 1 Når alle mellemrummene er udfyldt, er regneudtrykket en sum af led som alle er 1. Hvert led består nemlig enten af et af de oprindelige 1-taller eller af to eller flere 1-taller ganget sammen. Hvis antallet af led er lige, bliver summen lige, og Georg vinder.

Da der er 2017 mellemrum, og Georg begynder, bliver det også Georg der sætter det sidste tegn. Georg har en vindende strategi: Han sætter vilkårlige tegn indtil sin sidste tur. Lige inden han sætter sit sidste tegn, tæller han antallet af plusser på tavlen. Hvis det er lige, sætter han et plus, og hvis det er ulige, sætter han et gangetegn. På den måde sikrer han at der til sidst er et ulige antal plusser, hvilket betyder at der er et lige antal led, hvormed han vinder.

Opgave 2



Da arealet af de fire små cirkler ($4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 4\pi$) er lig med arealet af den store cirkel ($\pi \cdot 2^2 = 4\pi$), er de lysegrå områder lige så store som de mørkegrå, fordi de små cirkler dækker de lysegrå områder to gange og de mørkegrå nul gange. Da malingspriserne er hhv. 10 kr./m^2 og 30 kr./m^2, får man derfor den rigtige pris ved at benytte gennemsnitsprisen 20 kr./m^2 for alle områder. Den samlede pris for at male figuren bliver dermed 80π kr.

Opgave 3 At de tre brøker er hele tal, betyder at a går op i b, b går op i $c + 100$, og $2c + 200$ går op i $a + b + 169$. Da a går op i b, og b går op i $c + 100$, går a op i $c + 100$ og dermed også i $2c + 200 = 2(c + 100)$. Heraf fås videre at a går op i $a + b + 169$ fordi $2c + 200$ går op i $a + b + 169$. Da a går op i både a, b og $a + b + 169$, følger det at a går op i 169. Da $169 = 13^2$, og 13 er et primtal, må a være enten 1, 13 eller 169.

At hver af disse tre værdier for a faktisk er mulige, ses ved at angive værdier af b og c så forudsætningerne er opfyldt. Det kan f.eks. gøres således: I hvert af tilfældene $a = 1$, $a = 13$, $a = 169$ sættes $b = a + 169$. Herved går a op i b, så den første brøk er hel. Videre sættes $c = b - 100$ (muligt da $b > 100$), og den anden brøk bliver $\frac{c+100}{b} = 1$, altså hel. Endelig bliver også den sidste brøk 1 og dermed hel, idet $\frac{a+b+169}{2c+200} = \frac{a+a+169+169}{2(a+169)} = 1$.

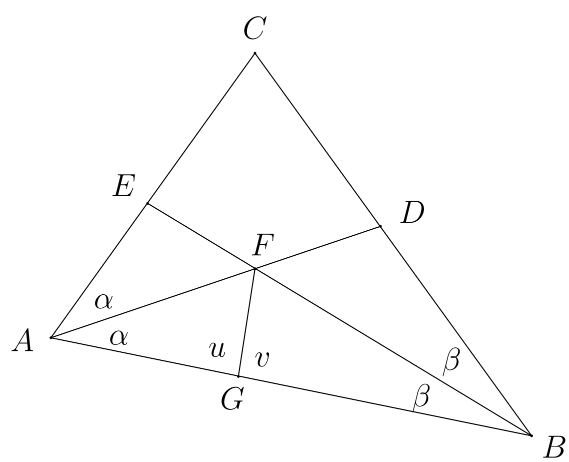
Opgave 4 Lad n betegne antallet af forskellige tal i den givne talfølge. Af de n forskellige tal kan der højst dannes $n(n - 1) + 1$ forskellige brøker med de pågældende tal i tæller og nævner. Det skyldes at der er $n(n - 1)$ måder at danne en brøk med forskellige tal i tæller og nævner (tælleren kan vælges på n måder og nævneren på $n - 1$ måder), og at de n brøker med værdien 1 (samme tal i tæller og nævner) kun medtælles én gang. I vores situation er 99 af brøkerne forskellige, altså må $n(n - 1) + 1 \geq 99$. Det mindste tal n der opfylder denne ulighed, er 11 (da $10 \cdot 9 + 1 = 91 < 99$ og $11 \cdot 10 + 1 = 111 \geq 99$). Antallet af forskellige tal i talfølgen er altså mindst 11.

At 11 faktisk er det søgte svar, eftervises ved at angive en talfølge med kun 11 forskellige tal som opfylder det givne. En sådan kan f.eks. konstrueres på følgende måde: Lad $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{11}$ betegne de 11 primtal 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Som $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ tages nu de 100 første tal dannet efter følgende system:

$$
\begin{array}{l}
p_1, \\
p_2,\ p_1, \\
p_3,\ p_2,\ p_3,\ p_1, \\
p_4,\ p_3,\ p_4,\ p_2,\ p_4,\ p_1, \\
p_5,\ p_4,\ p_5,\ p_3,\ p_5,\ p_2,\ p_5,\ p_1, \\
p_6,\ p_5,\ p_6,\ p_4,\ p_6,\ p_3,\ p_6,\ p_2,\ p_6,\ p_1, \\
\qquad\qquad \vdots \\
p_{11},\ p_{10},\ p_{11},\ p_9,\ p_{11},\ p_8,\ p_{11},\ \ldots,\ p_{11},\ p_2,\ p_{11},\ p_1
\end{array}
$$

Kun de 11 forskellige tal indgår. Da ingen af brøkerne $\frac{a_i}{a_{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots, 99$, har både samme tæller og samme nævner, og da de alle er uforkortelige, er de alle forskellige. Følgen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ opfylder således kravene. Hermed er eftervist at 11 er den søgte nedre grænse.

Opgave 5



Sæt $\alpha = \frac{1}{2}\angle A$ og $\beta = \frac{1}{2}\angle B$. Lad F være vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt. Lad G være det punkt på AB der opfylder at $|AG| = |AE|$ og $|BG| = |BD|$ (at dette punkt findes, følger af antagelsen $|AE| + |BD| = |AB|$). Trekanterne AGF og AEF er nu kongruente da de har $|AG| = |AE|$, en fælles side AF og samme mellemliggende vinkel α. På tilsvarende måde ses at trekanterne BGF og BDF er kongruente. Sæt $u = \angle AGF$ og $v = \angle BGF$. Så er også $\angle AEF = u$ og $\angle BDF = v$. Da u og v er nabovinkler ved G, er $u + v = 180°$. Ved at se på vinklerne ved E, hhv. D, fås da at $\angle CEF = 180° - u = v$, hhv. $\angle CDF = 180° - v = u$. Vinklerne $\angle CEF$ og $\angle CDF$ i firkant $CEFD$ er dermed tilsammen 180°. Heraf følger at $\angle C = 180° - \angle EFD$. Imidlertid er $\angle EFD = \angle AFB$ da de er topvinkler, og $\angle AFB = 180° - (\alpha + \beta)$ pga. vinkelsum i trekant AFB. Samlet fås $C = \alpha + \beta$. Ved brug af vinkelsum i trekant ABC fås $2\alpha + 2\beta + (\alpha + \beta) = 180°$, hvoraf $\alpha + \beta = 60°$. Altså er $C = 60°$.