Retningslinjer for bedømmelsen
Georg Mohr-Konkurrencen 2017
2. runde

Besvarelser som falder uden for de løsninger som ligger til grund for pointskemaerne, bedømmes ved analogi så skridt med tilsvarende vægt i den samlede løsning får tilsvarende point.

Opgave 1

Fuldstændig løsning af opgaven giver 4 point. Derindenfor kan der gives følgende delpoint, som kan lægges sammen.

- 1 point for at skrive at et tals kvadrat aldrig er negativt.
- 1 point for at udelukke $+$ i den første ligning.
- 1 point for at kombinere de to ligninger på en måde som er egnet til bestemmelse af tegnet i den anden ligning.
- 1 point for på grundlag af en sådan kombination at udelukke enten at tegnet i den anden ligning er $+$, eller at de to tegn er forskellige.

Bemærkning: Udelukkelserne i det andet og fjerde point er forudsat at udnytte konstateringen i det første point.

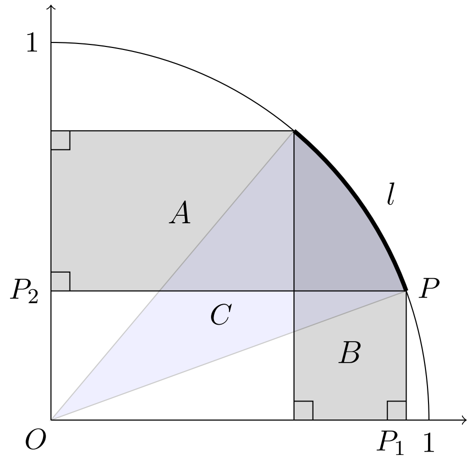
Bemærkning: Hvis der ikke er givet andre point, giver det 1 point at vise med et eksempel at ligningssystemet har en løsning hvis begge tegn er $-$.

Opgave 2

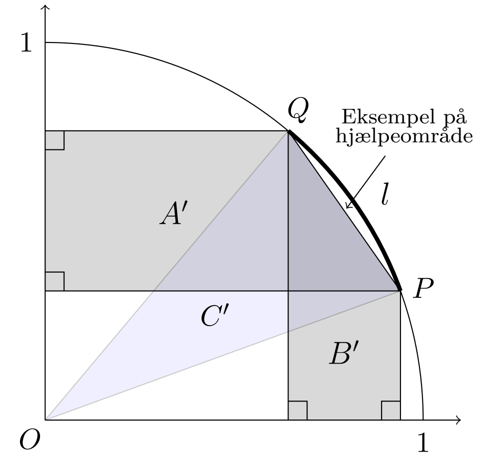
- 2 point for at vise at Georg kan strege $2, 5, \dots, 50$ ud. Hvis der blot uden begrundelse skrives at Georg kan strege $2, 5, \dots, 50$ ud, gives 1 point.
- 2 point for at vise at Georg ikke kan strege andre tal ud. Heraf kan der gives 1 point for ét af følgende.
  - Nævne at talrækken $2, 5, \dots, 50$ omfatter alle tal inden for pladen af formen $3n+2$, hvor n er et helt tal, eller tilsvarende, og vise at hvis et tal har denne form, så har tallet gange 10 samme form.
  - Nævne at talrækken $2, 5, \dots, 50$ omfatter alle tal inden for pladen af formen $3n+2$, hvor n er et helt tal, eller tilsvarende, og vise at hvis et tal har denne form, så har tallet minus 3 samme form.

Bemærkning: Det er tilladt deltagerne at anvende kendte resultater fra restklassealgebra.

Opgave 3



a) Regning med arealer



b) Beregning

a) Regning med arealer

- 1 point for at vise længde$(l) = 2 \cdot$ areal(C).
- 1 point for at udtrykke ét eller flere af arealerne A, B og C som en kombination af hjælpearealer på en måde som leder i retning af et bevis.
- Yderligere 1 point for at bevise de kongruenser såsom $OP_1P \cong OP_2P$ som behøves for at bevise areal$(A)+$areal$(B) = 2\cdot$areal(C). Hvilke der er nødvendige, afhænger af hvilke hjælpearealer der er indført.
- Yderligere 1 point for at afslutte beviset for areal(A) + areal(B) $=$ $2 \cdot$ areal(C) og konkludere at areal(A) + areal(B) = længde(l).

b) Beregning

- 1 point for at vise længde$(l) = 2 \cdot$ areal(C).
- 1 point for at indføre et hjælpeområde som er begrænset af l og ét eller flere linjestykker, og som er indholdt i alle områderne A, B og C. Fx området begrænset af l og korden PQ.
- Yderligere 1 point for at udtrykke arealerne af de resterende polygoner A', B' og C' ved koordinater eller tilsvarende egnede variable.
- Yderligere 1 point for at vise areal(A') + areal(B') $=$ $2 \cdot$ areal(C') ved beregning og konkludere at areal(A) + areal(B) = længde(l).

c) Integration

- 1 point for at opstille et integral for ét af arealerne A og B.
- Yderligere 3 point fordelt på én af følgende måder.
  - 1 point for at regne integralet ud.
  - Yderligere 1 point for at udtrykke det udregnede integral ved buelængder på enhedscirklen.

- Yderligere 1 point for at vise at det udregnede integral lagt sammen med det tilsvarende integral for det andet areal giver længde(l).

Eller:

- 1 point for at udtrykke integralet som integral over en retningsvinkel.
- Yderligere 1 point for at samle integralene for A og B til ét.
- Yderligere 1 point for at regne det samlede integral ud og vise at det er lig med længde(l).

Opgave 4

Definintion: Ved det *minimale* n forstås i det følgende det *mindste* fircifrede tal som er større end 2017, og for hvilket der findes et helt tal x der opfylder ligningen.

a) Analyse af minimalitetskravet.

- 1 point for at vise at der findes et n og et x som opfylder ligningen, og at der for det minimale n gælder $n \leq 2222$ (så $A = 2$).
- Yderligere 2 point for at vise $x = 2$ for det minimale n. Heraf kan 1 point gives for at vise $x \leq 6$.
- Yderligere 1 point for at vise at $B = 1$, $C = 6$, $D = 7$ for det minimale n.

b) Indkredsning af mulige n og x

Bemærkning: Her betegner n og x blot sådanne som opfylder ligningen.

- 1 point for at vise at $x \leq 6$.
- Yderligere 1 point for at vise at alle ligningens fire kvadratrødder er lig med 2 eller 3.
- Yderligere 1 point for at vise at cifrene er lig med 1, 2, 6 eller 7.
- Yderligere 1 point for at vise at $n = 2167$ og $x = 2$ opfylder ligningen, og den ikke er opfyldt med noget mindre n større end 2017.

c) Afprøvning af små A og B.

- 1 point for at vise at ligningen ikke har løsninger med $A = 2$, $B = 0$ og $x \leq 3$.
- 1 point for at vise at ligningen ikke har løsninger med $A = 2$, $B = 0$ og $x \geq 4$.
- 1 point for at vise at ligningen har mindst én løsning med $A = 2$, $B = 1$ og $x \leq 3$, og at den af dem der giver det mindste n, har $C = 6$ og $D = 7$.
- 1 point for at vise at ligningen ikke har løsninger med $A = 2$, $B = 1$ og $x \geq 4$.

Bemærkning: For besvarelser af typen c kan der kun gives 4 point hvis det også konkluderes at $n = 2167$ er det minimale n.

Bemærkning: Ligningens kvadratrødder er hele tal fordi de er lig med x, $x^2 - A$ og så videre. Der kan højst gives 3 point i alt for en besvarelse hvor det uden sådan begrundelse blot benyttes som en kendsgerning at én af dem må være heltallig.

Opgave 5

- 1 point for at vise at turneringen kan have haft fem deltagere.
- 3 point for at vise at turneringen maksimalt kan have haft fem deltagere. Delpoint for denne del ses nedenfor.

a) Afgjorte og uafgjorte spil

- 2 point for at vise at hver spiller højst har to afgjorte og højst to uafgjorte spil. Heraf 1 point for ét af følgende.
  - Vise ét af tilfældene.
  - Vise at der inden for ethvert tripel er et afgjort og et uafgjort spil.
- Yderligere 1 point for at udlede at turneringen højst havde fem deltagere.

Bemærkning: I træningsmaterialet på Georg Mohr-konkurrencens hjemmeside vises at en tofarvet fuldstænding graf med seks knuder indeholder en ensfarvet trekant. Hvis problemstillingen oversættes til en graf hvor knuderne er spillerne, og hvor kanterne er farvet i to farver alt efter om kampen er afgjort eller uafgjort, kan dette resultat benyttes hvis der henvises til det på en måde som gør det troværdigt at kendskabet til det stammer fra den nævnte eller en tilsvarende kilde.

b) Regnskab med samlede point

- 1 point for at vise at hver spiller højst har vundet ét spil og højst har spillet to spil uafgjort.
- Yderligere 1 point for på dette grundlag at opstille en ulighed for antallet af deltagere hvoraf kan sluttes at det er højst fem.
- Yderligere 1 point for at løse uligheden med dette resultat.

c) Orienteret graf

- 1 point for at vise at hvis turneringen havde mindst fem deltagere, har hver spiller højst vundet ét spil og mindst tabt ét spil.
- Yderligere 1 point for at vise at den orienterede graf hvor hvert afgjort spil er repræsenteret ved en pil fra taber til vinder, så er en kreds som møder alle spillere.
- Yderligere 1 point for at udlede af det foregående at turneringen så højst havde fem deltagere.

Bemærkning: Der bedømmes ens hvad enten grafens pile går fra taber til vinder eller fra vinder til taber.