# Retningslinjer for bedømmelsen
# Georg Mohr-Konkurrencen 2016
# 2. runde

Besvarelser som falder uden for de løsninger som ligger til grund for pointskemaerne, bedømmes ved analogi så skridt med tilsvarende vægt i den samlede løsning får tilsvarende point.

## Opgave 1

Beregningen af antallet af elever med score over gennemsnittet har tre skridt:

- Multiplikationen $24 \cdot 3$ for at finde hvor meget summen af point vokser.
- Division af dette resultat med 4 for at finde hvor mange elever der scorede under gennemsnittet.
- Subtraktion af dette resultat fra $24 - 3$ for at finde hvor mange elever der scorede over gennemsnittet.

Hele beregningen eller dele af den kan være udformet som løsning af en ligning, hvilket gør det muligt at ovenstående regneoperationer eller deres omvendte optræder i andre rækkefølger. Der gives 1 point for hver af de nævnte operationer som optræder enten direkte eller omvendt i besvarelsen, og 1 point for konklusionen at 3 elever havde et score over gennemsnittet.

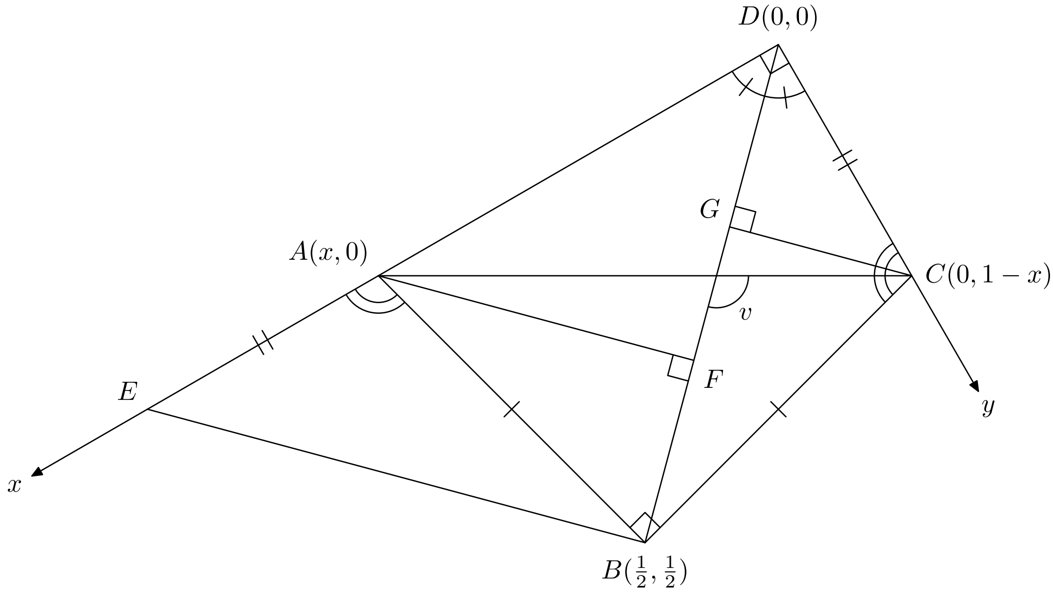
*Bemærkning:* Det er en forudsætning for at disse point kan gives, at udregningerne indgår i en logisk rigtig sammenhæng, og konklusionen bygger på et logisk rigtigt argument. Eksempelvis giver en besvarelse som følger, hvor tilstrækkelighed forveksles med nødvendighed, ingen point: »Der er 3 elever med score over gennemsnittet, for så har $24 - 3 - 3 = 18$ elever scoret under gennemsnittet, summen af point er øget med $18 \cdot 4 = 72$ og gennemsnittet med $72/24 = 3$.« Hvis dele af en udregning er logisk rigtig, gives der point for dén del. Eksempelvis giver følgende besvarelse 1 point for argumentets sidste del: »Der er 18 elever med score under gennemsnittet, for så er summen af point øget med $18 \cdot 4 = 72$ og gennemsnittet med $72/24 = 3$. Dermed har $24 - 3 - 18 = 3$ elever scoret over gennemsnittet.«

## Opgave 2

- 3 point for at vise at fladen $\times$ ikke kan være grøn. Additive delpoint kan opnås ved:
  - 1 point for at skrive at alle de flader der forbinder klodserne i en række, har samme farve, og tilsvarende for en søjle, eller blot bruge dette i et argument.
  - 1 point for at vise ét af følgende.
    - Enten i alle rækker eller i alle søjler har forbindelsesfladerne samme farve.
    - Forbindelsesfladerne i 2. og 5. søjle fra venstre på figuren er henholdsvis røde og blå.
    - I øverste række vender den 2. klods fra venstre sin blå side mod beskueren af figuren og den 5. klods fra venstre sin røde side dén vej.
- 1 point for at vise at der både findes et arrangement af klodserne som giver de farver der er angivet på figuren, og hvor fladen $\times$ er blå, og ét hvor denne flade er rød.

## Opgave 3

- 3 point i henhold til ét af nedenstående skemaer a) - d).
- Yderligere 1 point for at udlede af de opnåede resultater at alle firkanter som beskrevet i opgaven har samme areal.



*a) Opdeling i trekanterne $ABC$ og $ADC$*

- 1 point for et udtryk for firkantens areal som bygger på opdeling i trekanterne $ABC$ og $ADC$.
- Yderligere 1 point for omformning af udtrykket med brug af Pythagoras' sætning for trekant $ADC$ eller en dertil svarende omformning af udtrykket.
- Yderligere 1 point for reduktion af udtrykket så det ses at være konstant.

*b) Sammenligning med anden figur*

- 1 point for at indføre et punkt, her betegnet $E$, på $DA$'s forlængelse ud over $A$ så $|AE| = |CD|$.
- Yderligere 1 point for at bevise at trekant $BAE \cong$ trekant $BCD$.
- Yderligere 1 point for at bevise at trekant $BDE$ er ligebenet og retvinklet med hypotenuse 1.

*Bemærkning:* Tilsvarende point opnås ved tilsvarende anvendelse af et punkt, her betegnet $E'$, på $DC$'s forlængelse ud over $C$ så $|CE'| = |AD|$, eller $B$'s projektioner $E''$ og $E'''$ på linjerne $DA$ og $DC$, som danner kvadratet $DE''BE'''$ med sidelængde $1/2$.

*Bemærkning:* Hvis der indføres endnu en firkant $A'B'C'D$ som beskrevet i opgaven, hvor $A$ og $A'$ ligger på samme halvlinje fra $D$, og $C$ og $C'$ på samme halvlinje fra $D$, fås det andet point for at vise at hvis $B \neq B'$, ville firkanterne $AA'B'B$ og $CC'B'B$ være kongruente, og det tredje for heraf at udlede $B = B'$ og dermed at trekant $AA'B \cong$ trekant $CC'B$.

*c) Benytte at $DB$ halverer vinkel $D$*

- 1 point for at bevise at $DB$ halverer vinkel $D$, for eksempel ved først at vise at firkanten er indskrivelig.
- Yderligere 1 point for at udtrykke firkantens areal som $\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin v$, $\frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot (|AF| + |CG|)$, $\frac{1}{2} \cdot (|AF| \cdot |BF| + |AF| \cdot |DF| + |CG| \cdot |BG| + |CG| \cdot |DG|)$ eller tilsvarende, hvor $v$ er en vinkel mellem $AC$ og $BD$, og $F$ og $G$ er projektionerne af $A$ og $C$ på $BD$, og bevise ét af følgende:

  1) $|AC| \cdot \sin v = \dfrac{|AD| + |CD|}{\sqrt{2}}$. 2) $|AF| = \dfrac{|AD|}{\sqrt{2}}$ og $|CG| = \dfrac{|CD|}{\sqrt{2}}$.

  3) $|BD| = \dfrac{|AD| + |CD|}{\sqrt{2}}$. 4) $|BD| = |AF| + |CG|$. 5) $|BG| = |AF|$ og $|BF| = |CG|$.
- Yderligere 1 point for at bevise at firkantens areal kun afhænger af $|AD| + |CD|$.

*d) Analytisk løsning*

- 1 point for at anbringe nogle af firkantens hjørner hensigtsmæssigt i et koordinatsystem med brug af én eller flere variable, for eksempel sætte $D = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ og vælge andenaksens retning så $C$ har positiv andenkoordinat.
- Yderligere 1 point for at udtrykke koordinaterne til de restende hjørner ved den eller de indførte variable. I eksemplet opnå $C = (0, 1 - x)$ og $B = (1/2, 1/2)$.
- Yderligere 1 point for at udtrykke firkantens areal ved de indførte variable og reducere udtrykket så det ses at være konstant.

## Opgave 4

- 2 point for at beskrive en strategi som sikrer B sejren. Heraf kan 1 point gives for argumenter der begrunder at det er hensigtsmæssigt for B at sikre at der er et lige antal runde brikker, et lige antal trekantede brikker og et lige antal firkantede brikker hver gang A skal trække.
- Yderligere 1 point for hvert af følgende:
  - Vise at den beskrevne strategi altid kan følges.
  - Vise at B vinder hvis hun følger den beskrevne strategi.

## Opgave 5

*Bemærkning:* Hvis der ikke er opnået andre point, giver det 1 point at vise at talværdierne 6, 7 og 8 er mulige. Det giver 0 point at vise at nogle af disse værdier er mulige.

*Bemærkning:* Det forudsættes i det følgende at deltageren har skrevet at man uden tab af almenhed kan forudsætte $a \geq b \geq c$. Denne eller en tilsvarende iagttagelse giver ikke point i sig selv, men hvis et sådant udsagn mangler, må tilsvarende flere tilfælde være diskuteret for at nedenstående point kan opnås fuldt ud. Der trækkes højst 1 point for manglende tilfælde hvis det er åbenlyst at de kan behandles på samme måde som dem der er dækket i besvarelsen.

*a) Opdeling i tilfældene $b+c=a$ og $b+c=2a$*

- 1 point for at vise at $a \mid b+c$ medfører $b+c=a$ eller $b+c=2a$.
- 1 point for at vise at $b+c=a$ og $b \mid a+c$ medfører $b=c$ eller $b=2c$, og at brøkerne $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+c}{b}$ og $\frac{b+c}{a}$ er positive hele tal i disse tilfælde.
- 1 point for at vise at $b+c=2a$ medfører $a=b=c$, og at brøkerne $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+c}{b}$ og $\frac{b+c}{a}$ er positive hele tal i dette tilfælde.
- 1 point for at beregne $n = \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$ i de tre tilfælde $(a,b) = (2c,c)$, $(3c,2c)$ og $(c,c)$.

*b) Opdeling i tilfældene $a = b = c$, $a = b > c$, $a > b = c$ og $a > b > c$.*

- 1 point for at vise at hvis $a = b = c$, så er brøkerne $\dfrac{a+b}{c}$, $\dfrac{a+c}{b}$ og $\dfrac{b+c}{a}$ positive hele tal, og at vise at $a = b > c$ ikke er muligt.
- 1 point for at vise at hvis $a > b = c$, så er $a = 2b$, og at brøkerne $\dfrac{a+b}{c}$, $\dfrac{a+c}{b}$ og $\dfrac{b+c}{a}$ er positive hele tal i dette tilfælde.
- 1 point for at vise at hvis $a > b > c$, så er $a = 3c$ og $b = 2c$, og at brøkerne $\dfrac{a+b}{c}$, $\dfrac{a+c}{b}$ og $\dfrac{b+c}{a}$ er positive hele tal i dette tilfælde.
- 1 point for at beregne $n = \dfrac{a+b}{c} + \dfrac{a+c}{b} + \dfrac{b+c}{a}$ i de tre tilfælde $(a, b) = (c, c)$, $(2c, c)$ og $(3c, 2c)$.

*c) Reduktion til opløsning af 1 som sum af tre stambrøker*

- 1 point for at vise at $a \mid b+c$, $b \mid a+c$ og $c \mid a+b$ er ensbetydende med $s = ka = lb = mc$, hvor $s = a+b+c$, og $k$, $l$ og $m$ er positive hele tal som opfylder $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m} = 1$ (*) (og $k \leq l \leq m$ når $a \geq b \geq c$).
- 1 point for at vise at hvis (*) er opfyldt, er $k = 2$ eller $k = 3$.
- 1 point for at vise at hvis $k = 2$, er (*) opfyldt hvis og kun hvis $(l, m) = (3, 6)$ eller $(4, 4)$, og hvis $k = 3$, er (*) opfyldt hvis og kun hvis $(l, m) = (3, 3)$.
- 1 point for at beregne $n = k + l + m - 3$ for $(k, l, m) = (2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ og $(3, 3, 3)$.

*Bemærkning:* Selv om det er forholdsvis kendt at 1/2+1/3+1/6, 1/2+1/4+1/4 og 1/3+1/3+1/3 er de eneste opløsninger af 1 som sum af tre stambrøker, kræves dette bevist. Det er ikke tilstrækkeligt at skrive at det er et kendt resultat.

*d) Regning med divisorerne $u = \dfrac{a+b}{c}$, $v = \dfrac{a+c}{b}$ og $w = \dfrac{b+c}{a}$*

- 1 point for at vise at ligningerne $a + b = uc$, $a + c = vb$ og $b + c = wa$, hvor $u$, $v$ og $w$ er positive hele tal, har løsninger med positive hele tal $a$, $b$ og $c$ hvis og kun hvis $uvw - u - v - w - 2 = 0$ (**) (og $u \geq v \geq w$ når $a \geq b \geq c$).
- 2 point for at løse ligningen (**) for positive hele $u$, $v$ og $w$, heraf 1 point for at vise at løsningerne opfylder $uv - u - v - 3 \leq 0$.
- 1 point for at beregne $n = u + v + w$ for $(u, v, w) = (2, 2, 2)$, $(3, 3, 1)$ og $(5, 2, 1)$.

*Bemærkning:* Med $(k, l, m) = (w + 1, v + 1, u + 1)$ er ligningerne (*) og (**) ensbetydende. Der kan derfor forekomme besvarelser der kombinerer elementer af løsningerne c) og d). I bedømmelsen af sådanne besvarelser kombineres tilsvarende dele af de to pointskemaer efter censorernes skøn.