Løsninger til Georg Mohr-Konkurrencen 2016
2. runde

Opgave 1 Kald antal elever der scorede under klassens gennemsnit, for a. Hvis de a elever havde scoret hver 4 point højere, ville det øge pointsummen med $a \cdot 4$, og gennemsnittet ville forøges med $\frac{a \cdot 4}{24}$. Altså er $\frac{a \cdot 4}{24} = 3$, og dermed $a = 18$. Da tre elever scorede gennemsnittet, og $a = 18$ scorede under gennemsnittet, må $24 - 3 - 18 = 3$ elever have scoret over gennemsnittet.

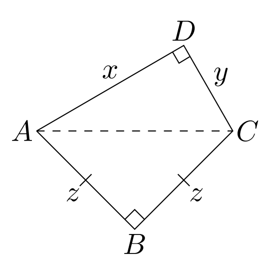
Opgave 2 Vi vil vise at fladen markeret med $\times$ ikke kan være grøn, men at både rød og blå er muligheder.

Kald fladen hvor to klodser er limet sammen, for forbindelsesfladen. Da alle klodser har samme farve på to modstående flader, må alle forbindelsesfladerne i samme række have samme farve. Det samme må gælde for en søjle.

Vi vil først vise at fladen markeret med $\times$ ikke kan være grøn. Betragt den nederste række. Da der både er en rød og en blå flade der vender fremad, må alle forbindelsesfladerne i rækken være grønne. Da 2. klods i nederste række har en blå flade der vender fremad, og forbindelsesfladerne i rækken er grønne, må forbindelsesfladerne i 2. søjle være røde. Tilsvarende må forbindelsesfladerne i 5. søjle være blå. Forbindelsesfladerne i en vilkårlig række kan nu hverken være røde eller blå da de alle indeholder en klods fra både 2. og 5. søjle. Derfor må de alle være grønne. Sidefladen markeret med $\times$ kan altså ikke være grøn, da ingen grønne flader vender fremad.

Nu viser vi at både rød og blå er muligheder. Man kan vende klodserne så alle forbindelsesfladerne i rækkerne er grønne, og så hver søjle enten kun har blå klodser eller kun røde klodser der vender fremad. Alle disse konstruktioner opfylder betingelserne så længe 2. søjle er blå, og 5. søjle er rød. Dette viser at farven af 1. søjle, og dermed $\times$, både kan være både rød og blå.

Opgave 3 Sæt $x = |AD|$, $y = |DC|$ og $z = |AB| = |BC|$. Firkantens areal udregnes som summen af arealerne af de to trekanter ABC og ACD, altså $\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}xy$.



Pythagoras' sætning anvendt på trekanterne ABC og ACD giver $2z^2 = |AC|^2$ og $x^2+y^2 = |AC|^2$ og dermed $2z^2 = x^2 + y^2$. Med brug heraf bliver firkantens areal $\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}xy = \frac{1}{4}(2z^2 + 2xy) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 2xy) = \frac{1}{4}(x + y)^2$. Alle firkanter der opfylder betingelsen $x + y = 1$, har således samme areal, nemlig arealet $\frac{1}{4}$.

Opgave 4 Bertha kan sikre sig sejren uanset hvordan Alma spiller. Berthas vindende strategi er at sørge for at der hver gang hun har trukket, er et lige antal af hver af de tre slags brikker.

Først viser vi at det er muligt for Bertha at følge denne strategi. Til at starte med er der et lige antal af hver af de tre slags brikker. Hvis Alma tager to forskellige slags brikker, så tager Bertha de samme slags brikker som Alma. Dette er muligt da der var et lige antal af hver inden Alma trak, og Alma kun har trukket en af hver. Hvis Alma tager to ens brikker, tager Bertha også to ens brikker (men ikke nødvendigvis samme slags som Alma). Dette er muligt så længe der er brikker tilbage, da der efter at Alma har trukket to ens, stadig må være et lige antal af hver slags. På denne måde sikrer Bertha at der er et lige antal af hver af de tre slags brikker når hun har trukket, og hvis hun fortsætter med at følge denne strategi, vil det gælde efter hvert eneste af hendes træk. Bertha kan altså følge denne strategi så længe der er brikker tilbage når hun skal trække.

Nu viser vi at strategien fører til sejr. Bemærk at antallet af brikker til at begynde med er et multiplum af 4. Når Bertha skal trække, vil der derfor altid være mindst to brikker tilbage, og derfor kan Bertha altid trække. Altså taber Alma når Bertha følger denne strategi.

Opgave 5 Da a, b og c indgår symmetrisk i summen

$$S = \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a},$$

kan vi uden tab af generalitet antage at $a \geq b \geq c$. Antag altså at a, b og c er positive hele tal med $a \geq b \geq c$ som opfylder at alle de tre brøker der indgår i summen S, også er hele.

Da $a \geq b \geq c > 0$, er $2a \geq b + c > 0$, og da $\frac{b+c}{a}$ er et helt tal, må $\frac{b+c}{a} = 1$ eller $\frac{b+c}{a} = 2$.

Hvis $\frac{b+c}{a} = 1$, er $a = b + c$. Altså er $\frac{a+c}{b} = \frac{b+c+c}{b} = 1 + \frac{2c}{b}$. Da brøken $\frac{a+c}{b}$ er et helt tal, må $\frac{2c}{b}$ også være et helt tal, og da $b \geq c$, må $\frac{2c}{b} = 1$ eller $\frac{2c}{b} = 2$. Dermed er $b = 2c$ eller $b = c$. Altså er $(a, b, c) = (3c, 2c, c)$ eller $(a, b, c) = (2c, c, c)$.

Hvis $\frac{b+c}{a} = 2$, er $2a = b + c$. Sammenholdt med $a \geq b \geq c$ medfører dette at $a = b = c$. Altså er $(a, b, c) = (c, c, c)$.

Vi har nu vist at alle talsæt (a, b, c) der opfylder opgavens betingelser, er af formen $(a, b, c) = (3c, 2c, c)$ eller $(a, b, c) = (2c, c, c)$ eller $(a, b, c) = (c, c, c)$, hvor c er et positivt helt tal. Omvendt viser vi nu at alle sådanne talsæt faktisk opfylder opgavens betingelser. Hvis $(a, b, c) = (3c, 2c, c)$, er $\frac{a+b}{c} = \frac{3c+2c}{c} = 5$, $\frac{a+c}{b} = \frac{3c+c}{2c} = 2$, $\frac{b+c}{a} = \frac{2c+c}{3c} = 1$, og $S = 5 + 2 + 1 = 8$. Hvis $(a, b, c) = (2c, c, c)$, er $\frac{a+b}{c} = \frac{2c+c}{c} = 3$, $\frac{a+c}{b} = \frac{2c+c}{c} = 3$, $\frac{b+c}{a} = \frac{c+c}{2c} = 1$, og $S = 3 + 3 + 1 = 7$. Hvis $(a, b, c) = (c, c, c)$, er $\frac{a+b}{c} = \frac{c+c}{c} = 2$, $\frac{a+c}{b} = \frac{c+c}{c} = 2$, $\frac{b+c}{a} = \frac{c+c}{c} = 2$, og $S = 2 + 2 + 2 = 6$.

De mulige værdier for summen S er altså 6, 7 og 8.