Retningslinjer for bedømmelsen
Georg Mohr-Konkurrencen 2014
2. runde

Besvarelser som falder uden for de løsninger som ligger til grund for pointskemaerne, bedømmes ved analogi så skridt med tilsvarende vægt i den samlede løsning får tilsvarende point.

Opgave 1

Fuldstændig løsning kræver at svaret »ja« er begrundet ved angivelse af en argumentation moren kan anvende for at bestemme cifrene. For enkelte skridt i en sådan anført argumentation gives der point efter nedenstående skema. Rigtige argumenter for ét eller flere af skemaets resultater bedømmes med de samme point selv om de optræder i en begrundelse for svaret »nej«.

a) Enhver løsning hvor B + C = 12 er et delresultat.

- 1 point for at nå frem til at hvis cifrene er $A > B > C$, så er største og næststørste trecifrede tal der kan dannes, ABC og ACB.
- Yderligere 1 point for ét af følgende og 2 point for begge dele.
  - Vise $A = 8$.
  - Vise $B + C = 12$.
- Yderligere 1 point for at vise $B = 7$ og $C = 5$.

b) Mulighederne $B = 1, 2, \ldots, 9$ *eller* $C = 1, 2, \ldots, 9$ *diskuteres én ad gangen med det resultat at andre muligheder end* $A, B, C = 8, 7, 5$ *kan udelukkes.*

- 1 point for at nå frem til at hvis cifrene er $A > B > C$, så er største og næststørste trecifrede tal der kan dannes, ABC og ACB.
- Yderligere 3 point for at diskutere mulighederne $B = 1, 2, \ldots, 9$ eller mulighederne $C = 1, 2, \ldots, 9$ én ad gangen og udelukke andre muligheder end $A, B, C = 8, 7, 5$. Der trækkes 1 point for hver af de ni muligheder hvor diskussionen mangler eller er forkert, dog højst 3 point i alt.

Opgave 2

I det følgende betegner A, B, C, hvor $A : B : C = 6 : 5 : 4$, gamblernes beløb før spillet, og D, E, F, hvor $D : E : F = 7 : 6 : 5$, er beløbene efter spillet.

- 1 point for at nævne $A+B+C = D+E+F$, $B = E$ eller lignende og vise opmærksomhed på at forholdet mellem alle seks beløb er bestemt ved en sådan sammenhæng.
- Yderligere 1 point for hvert af følgende. Disse point er uafhængige.
  - Nå frem til at ud af de ni differenser $D-A, D-B, \ldots$ er kun $D-B$, $D-C$, $E-C$, $F-C$ positive, og bestemme disse fire differensers forhold.
  - Bestemme en divisor i ét af beløbene $A, B, \ldots$ eller en kombination såsom $A+B+C$ eller $F-C$ som er tilstrækkelig stor til at udlede at $D-B, D-C, E-C$ er større end 3.
- Yderligere 1 point for at udlede svaret 75 af det foregående.

Opgave 3

a) Klassisk løsning

- 1 point for at indføre en relevant trekant kongruent eller ligedannet med trekant ACM eller trekant BDM. Trekanten forudsættes herefter uden tab af almenhed at være kongruent eller ligedannet med trekant ACM.
- Yderligere 1 point for ét af følgende og 2 point for begge dele.
  - Bevise kongruensen eller ligedannetheden.
  - Bevise at den vinkel i den indførte trekant som svarer til u i trekant ACM, er lig med v.
- Yderligere 1 point for at kombinere disse resultater til konklusionen $u = v$.

Bemærkning: Påvisning af at en trekant fremgår af en anden ved flytning, er tilstrækkeligt bevis for kongruens, og påvisning af at den fremgår ved multiplikation ud fra et punkt, er tilstrækkeligt bevis for ligedannethed.

Bemærkning: Det sidste point kan opnås uden det andet og tredje point hvis sammenhængene blot postuleres uden bevis.

b) Trigonometrisk eller analytisk løsning

- 1 point for ét af følgende.
  - Opstille trigonometriske relationer mellem stykker i trekant ACM eller trekant BDM. Relationerne skal sammen med de tilsvarende relationer i den anden trekant samt $|AM| = |BM|$, $|AC| = |BD|$ og $\angle AMC + \angle BMD = 180^\circ$ være tilstrækkelige til at udlede at u og v er enten samme vinkel eller supplementvinkler.
  - Indføre et koordinatsystem, nogle koordinater og en parametrisering af nogle koordinater og udtrykke stykker i trekant ACM eller trekant BDM ved de indførte koordinater og parametre. Ligningerne skal sammen med de tilsvarende ligninger for den anden trekant samt $|AM| = |BM|$, $|AC| = |BD|$ og $\angle AMC + \angle BMD = 180^\circ$ være tilstrækkelige til at udlede at u og v er enten samme vinkel eller supplementvinkler.
- Yderligere 1 point for med brug af $|AM| = |BM|$, $|AC| = |BD|$ og $\angle AMC + \angle BMD = 180^\circ$ at opnå ligninger som er tilstrækkelige til at udlede at u og v er enten samme vinkel eller supplementvinkler.
- Yderligere 1 point for at udlede $\sin u = \sin v$, $(\cos u)^2 = (\cos v)^2$ eller lignende af ligningerne.
- Yderligere 1 point for enten af ligningerne at udlede $\cos u = \cos v$ eller med et klassisk argument udelukke at u og v kan være supplementvinkler, og konkludere at der gælder $u = v$.

Bemærkning: Hvis $\cos u = \cos v$ udledes direkte af de opstillede ligninger, opnås begge de to sidste point.

Opgave 4

- 3 point for at vise at hvis $20n$ og $5n + 275$ er kvadrattal, er $n = 125$. Herindenfor kan der gives følgende delpoint.
  - 1 point for at udtrykke $20n$ og $5n + 275$ ved kvadrattal m^2 og k^2 og eliminere n af ligningerne.
  - Yderligere 1 point for ét af følgende.
    * Ved inførelsen af m og k eller senere i en besvarelse at argumentere rigtigt for og gøre brug af $5 \mid x^2 \Rightarrow 5 \mid x$ eller $10 \mid x^2 \Rightarrow 10 \mid x$ hvis x er et helt tal.
    * Afgrænse løsningerne med hensyn til m og k til nogle få muligheder.
- 1 point for at vise at hvis $n = 125$, er $20n$ og $5n + 275$ kvadrattal.

Bemærkning: Hvis ingen andre point er opnået, kan der gives 1 point hvis der er argumenteret rigtigt for at man kan sætte $20n = 100m^2$ og $5n + 275 = 25k^2$, hvor m og k er hele tal.

Opgave 5

- Det giver 3 point at beskrive en øvre grænse som ved udregning vil give 2.030.113, angive en følge som opfylder opgavens krav og når grænsen, og påvise at den gør det. Herindenfor kan opnås følgende delpoint som er indbyrdes uafhængige.
  - 1 point for
    - enten at løse den opgave hvor tallet 2014 er erstattet med tallet 2, eller en dermed ækvivalent opgave
    - eller at udtrykke summen som positivt vægtet sum af led af formen $x_{i-1} + x_i$ med vilkårligt $i \geq 1$ eller $x_{i-2} + x_i$ med lige $i \geq 2$.
  - 1 point for at angive den optimale følge uden at påvise optimalitet.
- Det giver yderligere 1 point at regne tallet ud.

Bemærkning: Sidste point gives også hvis summen ikke er udregnet helt men omskrevet til $1 + 2 \cdot 1007 \cdot 1008$, $2015 + 2 \cdot 1007^2$, $\frac{2015 \cdot 2016}{2} - 1007$, $\frac{2014 \cdot 2015}{2} + 1008$ eller tilsvarende. Dette point gives *ikke* for udtryk som $2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot 2013 + 2015$.

Bemærkning: Der er kun ét valg af $x_0, x_1, \ldots, x_{2014}$ så summen bliver maksimal, nemlig $x_{2n-1} = 2n - 1$ og $x_{2n} = 2n + 1$.