Georg Mohr-Konkurrencen 2013
Anden runde

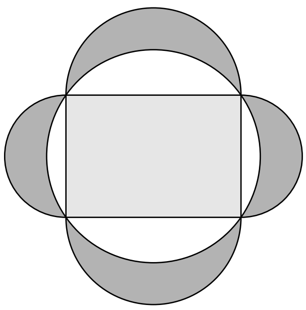
Tirsdag den 8. januar 2013 kl. 9-13

Tilladte hjælpemidler: kun skrive- og tegneredskaber.
Husk at argumentation er væsentlig ved bedømmelsen.

Opgave 1. Figuren viser en spilleplade med 16 felter. Til at starte med står to biler på hver sit felt. To spillere A og B skiftes til at trække, og A starter. I hvert træk vælger en spiller én af bilerne og flytter den ét eller flere felter til højre. Dog må den bagerste bil aldrig overhale den forreste eller nå op på siden af den. Den første spiller som ikke kan trække, har tabt.

a) Bevis at A kan vinde uanset hvordan B trækker, hvis de to biler starter som vist på figuren.

b) Bestem samtlige startpositioner for de to biler hvor B kan vinde uanset hvordan A trækker.



Opgave 2. Figuren viser et rektangel, dets omskrevne cirkel og fire halvcirkler, der har rektanglets sider som diametre.

Bevis at de fire mørkegrå måneformede områders arealer tilsammen er lig med arealet af det lysegrå rektangel.

Opgave 3. En talfølge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ er givet ved $x_0 = 8$ og $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n}{1 - x_n}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Bestem tallet x_{2013} .

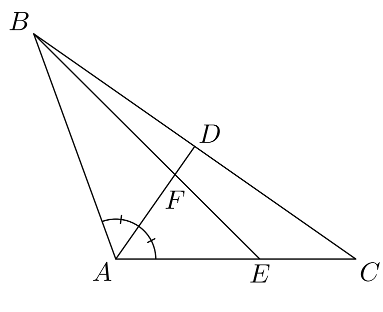
Opgave 4. Det positive hele tal a er større end 10, og alle dets cifre er ens.

Bevis at a ikke er et kvadrattal.

(Et *kvadrattal* er et tal som kan skrives som n^2, hvor n er et helt tal).

Opgave 5. I trekant ABC skærer vinkelhalveringslinjen fra A siden BC i punktet D. Punktet E ligger på siden AC, og linjerne AD og BE skærer hinanden i punktet F. Desuden gælder $\dfrac{|AF|}{|FD|} = 3$ og $\dfrac{|BF|}{|FE|} = \dfrac{5}{3}$.

Bevis at $|AB| = |AC|$.



Sponsorer: Ministeriet for Børn og Undervisning, Carlsbergs Mindelegat for Brygger J.C. Jacobsen, Georg Mohr Fonden, Matematiklærerforeningen, Dansk Matematisk Forening, Gyldendal og Texas Instruments.