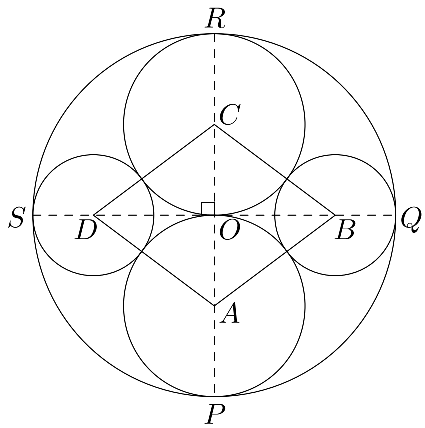
Retningslinjer for bedømmelsen
Georg Mohr-Konkurrencen 2012
2. runde

Besvarelser som falder uden for de løsninger som ligger til grund for pointskemaerne, bedømmes ved analogi så skridt med tilsvarende vægt i den samlede løsning får tilsvarende point.

Opgave 1

Der kræves ikke begrundelse for følgende, hvor O betegner den store cirkels centrum, og P, Q, R og S dens røringspunker med cirklerne med centre A, B, C og D.



1. Figuren viser spejlsymmetri om akserne AC og BD. Det medfører:
   a. Linjerne AC og BD står vinkelret på hinanden.
   b. Punktet O er skæringspunkt for linjerne AC og BD og halverer linjestykkerne AC og BD.
   c. Punkterne P og R ligger på linjen AC, og Q og S på linjen BD.
   d. Siderne i $\square ABCD$ er lige lange.
   e. Figuren har 180°-drejningsinvarians om O.
2. Når to cirkler rører hinanden, ligger røringspunktet på centerlinjen. Centerafstanden er summen af radierne i tilfælde af udvendig røring og differensen mellem den største og den mindste radius i tilfælde af indvendig røring.

Point:

- Det giver 1 point at nå frem til at $|OA| = 3$.
- Det giver yderligere 1 point at indføre radius af cirklen med centum i B som variabel r og udtrykke $|OB|$ og $|AB|$ ved r.
- Det giver yderligere 1 point at
  - enten opstille Pythagoras' ligning for $\triangle OAB$ og løse den med hensyn til r
  - eller bemærke at $r = 2$ giver $|OB| = 4$ og $|AB| = 5$ så OAB er en 3-4-5-trekant og dermed retvinklet, og begrunde at $r = 2$ så er eneste mulighed.
- Det giver yderligere 1 point at nå fra resultatet $r = 2$ til at $\square ABCD$ har arealet 24.

Opgave 2

- Der gives 2 point hvis besvarelsen indeholder et fuldstændigt sæt af ligninger eller sammenhænge mellem sidelængder i rektanglet og kvadraterne som tilsammen tillader at bestemme rektanglets sidelængder ud fra oplysningen om at det sorte kvadrat har sidelængde 1.
- 1 af de 2 point kan gives hvis de fleste af ligningerne eller sammenhængene i et sådant fuldstændigt sæt ses i besvarelsen.
- Det giver yderligere 2 point at argumentere fyldestgørende for at ligningerne bestemmer rektanglets sider entydigt.
- Der kan fratrækkes 1 point for mindre fejl i beregningerne.

Bemærkning: Der kræves ikke bevis for at ligningerne har en løsning med længder der kan være sider i kvadrater og et rektangel, fordi dette følger af spørgsmålets form.

Opgave 3

a. Generelt

- Det giver 1 point at skrive at albummet har mindst én side med 1 frimærke efterfulgt af mindst én side med 2 frimærker og så videre, og vise at et sådant album med 250 frimærker højst har 64 frimærker på en side, eller noget dertil svarende.
- Det giver yderligere 1 point at vise at hvis sidetallet i et sådant album er mindst muligt, indeholder højst to sider lige mange frimærker.
- Det giver yderligere 1 point at vise at kun én fordeling af frimærker på albummets sider opfylder beskrivelserne i de to forrige punkter.

- Det giver yderligere 1 point at vise at et sådant album har 13 sider.

b. Konstruktion

- Det giver 1 point at skrive at albummet har mindst én side med 1 frimærke efterfulgt af mindst én side med 2 frimærker og så videre, og vise at et sådant album med 250 frimærker højst har 64 frimærker på en side, eller noget dertil svarende.
- Det giver yderligere 1 point at vise at hvis Georg først laver én side af hver slags op til 64 frimærker og derefter hele tiden tilføjer sider med flest muligt frimærker, får han et album med 2×1, 2×2, 1×4, 2×8, 2×16, 2×32 og 2×64 frimærker på siderne, i alt 13 sider, eller tilsvarende.
- Det giver yderligere 1 point at vise at hvis sidetallet skal mindskes med udgangspunkt i Georgs album, skal to sider med lige mange frimærker erstattes med andre.
- Det giver yderligere 1 point at påpege at dette ikke lader sig gøre i Georgs album, og konkludere at dets sidetal 13 dermed er minimalt.

Bemærkning: Det giver 0 point at skrive at svaret er 13 sider, uden argumentation. Det giver 1 point at skrive at den minimale måde at udfylde albummet er 1,1,2,2,4,8,8,16,16,32,32,64,64, og at svaret derfor er 13 sider. Der kan gives yderligere 1 point hvis der er nogle, men ikke fyldestgørende, begrundelser for dette.

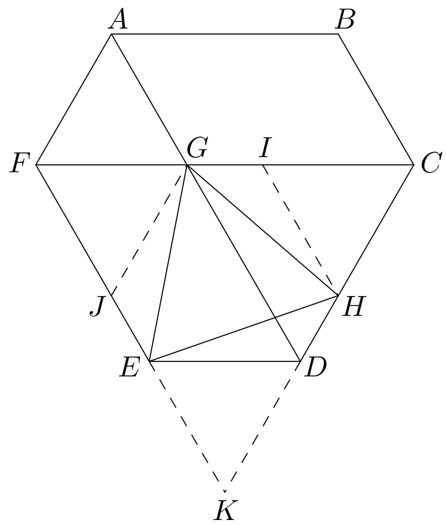
Opgave 4

- Det giver 1 point at skrive $ab \mid 100a + b$, $abt = 100a + b$, $(100a + b)/ab = t$, hvor t er et helt tal, eller noget tilsvarende.
- Det giver yderligere 1 point at vise at både b/a og $100a/b$ er hele tal og ét af dem divisor i 100, eller noget dermed ensbetydende. (Det kræves ikke nævnt udtrykkelig at begge tallene er divisorer i 100).
- Det giver yderligere 1 point at indskrænke antallet af brugbare divisorer i 100 til højst fire med anvendelse af oplysningen om at a og b er tocifrede tal.
- Det giver yderligere 1 point at indskrænke mulighederne for (a, b) til $(13, 52)$ og $(17, 34)$ og eftervise at disse par opfylder opgavens beskrivelse.

Bemærkning: Der gives ikke point for at skrive at (a, b) er $(13, 52)$ eller $(17, 34)$, uden argumentation.

Opgave 5

Det kræves ikke begrundet at sekskantens vinkler er 120°. Længder og vinkler kan bestemmes med brug af symmetri og parallelitet eller ved at det udnyttes at sekskanten er kongruent med en figur i et net af ligesidede trekanter med sidelængde 1. Nedenfor betegner I og J de punkter på CF og EF som er bestemt ved $HI \parallel EF$ og $GJ \parallel CD$. Punktet K er skæringspunktet mellem forlængelserne af siderne CD og FE.



Bevis for hvert af følgende giver 1 point.

- $\angle FCD = \angle CFE = 60°$ eller tilsvarende.
- $|CG| = 3$ og $|FG| = 2$ eller tilsvarende.

De sidste 2 point gives som følger.

a. To sider og en vinkel

- 1 point for at vise at $\triangle CGH$ og $\triangle FEG$ er kongruente.
- Yderligere 1 point for at vise $\angle EGH = 60°$ og konkludere at $\triangle EGH$ er ligesidet.

Bemærkning: Ved betragtning af andre trekanter end $\triangle CGH$ og $\triangle FEG$, for eksempel $\triangle IGH$ og $\triangle JEG$, gives tilsvarende point for at bestemme de nødvendige sider og vinkler.

b. Tre sider

- 1 point for at indføre punktet K og vise at $\triangle CFK$ eller $\triangle DEK$ er ligesidet.
- Yderligere 1 point for at vise at $\triangle CGH$, $\triangle FEG$ og $\triangle KHE$ er kongruente, og konkludere at $\triangle EGH$ er ligesidet.

Bemærkning: Ved betragtning af andre trekanter end $\triangle CGH$, $\triangle FEG$ og $\triangle KHE$, for eksempel $\triangle IGH$, $\triangle JEG$ og $\triangle DHE$, gives tilsvarende point for at bestemme de nødvendige sider og vinkler.

c. 120°-drejningsinvarians

- 1 point for at indføre punktet K og vise at $\triangle CFK$ er ligesidet.
- Yderligere 1 point for at vise at punkterne E, G og H ligger ens på siderne henholdsvis FK, CF og KC og konkludere at $\triangle EGH$ så er invariant under 120°-drejning om midtpunktet af $\triangle CFK$ og dermed ligesidet.

Bemærkning: Ved tilsvarende udnyttelse af 120°-drejningsinvarians af andre figurer end $\triangle CFK$, for eksempel sekskant $DEJGIH$, gives tilsvarende point for tilsvarende argumenter.

d. Trigonometri

- 2 point for at beregne tre sider eller to sider og en vinkel i $\triangle EGH$ med trigonometri og konkludere at trekanten er ligesidet.
- 1 af disse point gives for beregning af to sider eller en side og en vinkel.

e. Vektorregning

- 1 point for at beregne koordinaterne til punkterne E, G og H i et koordinatsystem.
- Yderligere 1 point for at beregne enten tre sider eller to sider og en vinkel i $\triangle EGH$ og konkludere at trekanten er ligesidet.