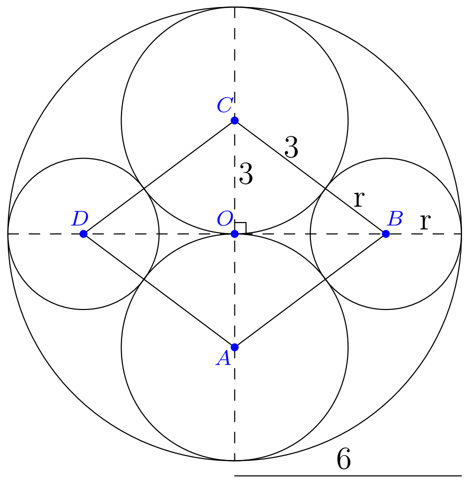
Løsninger til Georg Mohr-Konkurrencen 2012

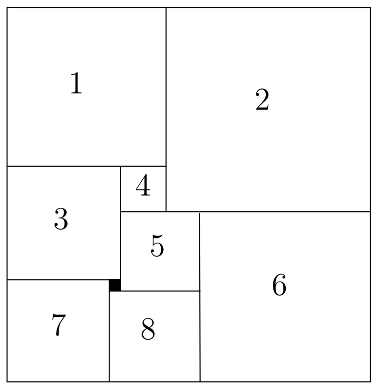
2. runde

Opgave 1



Lad O være centrum i den ydre cirkel, og lad r være radius i cirklen med centrum i B. Figuren har spejlingssymmetri i linjerne AC og BD. Heraf følger at diagonalerne i firkant $ABCD$ skærer hinanden i O og deler firkanten i fire kongruente retvinklede trekanter.
Om sidelængerne i trekanterne:
$|OC| = 3$, da den ydre cirkel kun rører cirklen med centrum i C.
$|BC| = 3 + r$, da cirklerne med centre i B og C kun rører hinanden.
$|OB| = 6 - r$, da den ydre cirkel kun rører cirklen med centrum i B.
Pythagoras' sætning anvendt på trekant COB giver at $(3+r)^2 = (6-r)^2 + 3^2$.
Ligningen løses: $(3+r)^2 = (6-r)^2 + 3^2 \Leftrightarrow 9 + r^2 + 6r = 36 + r^2 - 12r + 9 \Leftrightarrow r = 2$.
Trekant COB er dermed retvinklet med sidelængderne 3, 4 og 5. En sådan trekant har arealet 6. Firkant $ABCD$ er sammensat af fire retvinklede trekanter med hver arealet 6, dvs. firkantens areal er 24.

Opgave 2



Nummerer kvadraterne fra 1 til 8 som vist på figuren (det sorte kvadrat får intet nummer).
Sidelængden i kvadrat i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, betegnes x_i.
Af figuren ses:
$x_8 = x_5 + 1$,
$x_7 = x_8 + 1 = (x_5 + 1) + 1 = x_5 + 2$,
$x_3 = x_7 + 1 = (x_5 + 2) + 1 = x_5 + 3$,
$x_4 = x_3 - (x_5 - 1) = (x_5 + 3) - (x_5 - 1) = 4$,
$x_1 = x_3 + x_4 = (x_5 + 3) + 4 = x_5 + 7$,
$x_2 = x_1 + x_4 = (x_5 + 7) + 4 = x_5 + 11$,
$x_6 = x_5 + x_8 = x_5 + (x_5 + 1) = 2x_5 + 1$.

Af figuren ses at $x_5 + x_6 = x_2 + x_4$. Heraf fås ligningen $x_5 + (2x_5 + 1) = (x_5 + 11) + 4$, hvis løsning er $x_5 = 7$. Hermed bliver alle kvadraters sidelængder kendte, og dermed er der kun én mulighed for rektanglets sidelængder.

Opgave 3

Antag at Georg har anvendt så få sider som muligt. På den måde Georg har indsat frimærker i albummet, bliver antallet af frimærker på en side altid en potens af 2. Lad i være et ikke negativt helt tal. Der findes ikke i albummet tre eller flere sider med netop 2^i frimærker, idet de to sidste af den slags sider så kunne erstattes med én side med 2^{i+1} frimærker, og dermed ville sideantallet blive reduceret. Georg har dermed én eller to sider med hhv. $2^0, 2^1, 2^2, \dots 2^n$ frimærker, hvor n er bestemt ved at 2^n er det største antal frimærker på en side. Georg har dermed mindst indsat $1 + 2^1 + \dots + 2^n$ frimærker, og da $1 + 2^1 + \dots + 2^7 = 255 > 250$, er $n \le 6$. Desuden har Georg højst indsat $2(1 + 2^1 + \dots + 2^n)$ frimærker, og da $2(1 + 2^1 + \dots + 2^5) = 126 < 250$, er $n \ge 6$. Dermed er $n = 6$. Udvælg syv sider med henholdsvis $2^0, 2^1, 2^2, \dots 2^6$ frimærker. På disse sider er i alt indsat $1 + 2^1 + \dots + 2^6 = 127$ frimærker, og på de resterende sider i albummet må der så i alt være $250 - 127 = 123$ frimærker. Tallet $123 = 2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$ kan kun på denne måde opskrives som en sum af forskellige totalspotenser. Det viser at de resterende sider med frimærker indeholder h.hv. $2^0, 2^1, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ frimærker, i alt seks sider. Det mindste antal nødvendige sider er derfor $7 + 6 = 13$.

Opgave 4

De to tocifrede tal a og b opfylder at ab går op i $100a + b$. Altså går a op i $100a + b$ og dermed i b. Der findes dermed et helt tal s så $b = sa$, og da a og b er tocifrede, gælder $1 \le s \le 9$. Da $100a + b = a(100 + s)$, og ab går op i dette tal, så går $b = sa$ op i $100 + s$. At s går op i $100 + s$ og dermed i 100, begrænser yderligere de mulige værdier for s. De mulige værdier for s skal søges blandt tallene $1, 2, 4, 5$.
Hvis $s = 1$, går b op i 101. Umuligt da 101 ikke har nogle tocifrede divisorer.
Hvis $s = 2$, er b et lige tocifret tal der går op i $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Eneste mulighed er $b = 34$ og følgelig $a = \frac{b}{2} = 17$. Den mulighed er brugbar da $\frac{1734}{17 \cdot 34} = 3$.
Hvis $s = 4$, er b et tocifret tal i 4-tabellen der går op i $104 = 2^3 \cdot 13$. Eneste mulighed er $b = 52$ og følgelig $a = \frac{b}{4} = 13$. Den mulighed er brugbar da $\frac{1352}{13 \cdot 52} = 2$.
Hvis $s = 5$, er b et tocifret tal i 5-tabellen der går op i $105 = 5 \cdot 21$. Et sådant tal b eksisterer ikke.
Altså er de mulige værdier $a = 17, b = 34$ og $a = 13, b = 52$.

Opgave 5

Figuren viser en ligesidet trekant XYZ med sidelængde 7. Hver side inddeles ved delepunkter i syv lige store dele. Delepunkterne forbindes så trekanten opdeles i ligesidede trekanter med sidelængde 1. Delepunkter nr. 2 og 5 på hver side navngives som vist. Der gælder $|A_1B_1| = |C_1D_1| = |E_1F_1| = 3$, og da trekanterne XA_1F_1, YC_1B_1 og ZE_1D_1 er ligesidede, så er $|B_1C_1| = |D_1E_1| = |F_1A_1| = 2$. Alle vinkler i sekskanten $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ er på $120°$, da de er nabovinkler til vinkler på $60°$. Dermed er sekskanten $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ kongruent med den i opgaven givne sekskant, og vi kan slette indekset 1 på $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$. Delepunkt nr. 3 regnet fra Z på siden YZ bliver så netop H. Figuren viser at EG, GH, HE er længste side i kongruente trekanter med en vinkel på $120°$ og hosliggende sider med længder på henholdsvis 1 og 2. Dermed er $|EG| = |GH| = |HE|$, og trekant EGH er ligesidet.