Retningslinjer for bedømmelsen.
Georg Mohr-Konkurrencen 2011
2. runde

Det som skal vurderes i bedømmelsen af en besvarelse, er om deltageren har formået at analysere problemstillingen, kombinere de givne oplysninger til et svar på det stillede spørgsmål og argumentere overbevisende og udtømmende for svaret. Derimod er det ikke i sig selv væsentligt i hvilken grad deltageren viser beherskelse af matematikkens formelle apparat eller færdigheder inden for skolernes pensum.

Der kan gives indtil 4 point for hver af de 5 opgaver. En helt korrekt og fuldstændig besvarelse giver 4 point, og der gives ikke fuldt pointtal medmindre besvarelsen er i alt væsentligt korrekt og fuldstændig. For en delvis korrekt besvarelse eller blot skridt eller ideer som leder i retning af en løsning, kan der gives et eller flere point. Derimod giver regninger eller argumenter som ikke bringer deltageren nærmere en løsning, ikke point uanset om de er rigtige i sig selv. Tilfældige indfald uden funktion i sammenhængen tæller ikke i sig selv positivt ved bedømmelsen.

Bedømmelsen har til formål at fastslå hvem der har løst opgaverne bedst. Derfor skal kun konkrete skridt i retning af en løsning honoreres, og det skal ikke tages i betragtning om deltageren i øvrigt synes at have ydet en anerkendelsesværdig indsats.

Opgave 1

a. Konstruktiv løsning

- Det giver 1 point at finde to tal som nødvendigvis ligger i samme bunke, og begrunde nødvendigheden.
- Det giver yderligere 1 point at finde to sådanne par som nødvendigvis ligger i hver sin bunke, og begrunde nødvendigheden.

Bemærkning: 1 af disse point gives hvis deltageren viser samtlige mulige fordelinger af tallene 1-15 pånær ét af tallene 1, 3, 6, 10 og 15 og uden begrundelse nævner at der ikke findes andre. (Der er to sådanne fordelinger hvis 1 eller 3 mangler, og én hvis 6, 10 eller 15 mangler). Hvis deltageren viser samtlige mulige fordelinger uden at gøre rede for hvordan de er konstrueret, og uden at nævne at de udtømmer mulighederne, gives der 1 point for hele besvarelsen af opgaven hvis det derefter påvises at det sidste tal ikke kan føjes til nogen af bunkerne, ellers 0 point.

- Hvis ét af de fundne par har kvadrattalsum, giver det yderligere 2 point at konkludere at Georgs forsøg så ikke kan lykkes.
- Ellers giver det yderligere 1 point at finde et tal som danner kvadrattalsum med et tal fra hvert af de to par, og yderligere 1 point at konkludere at Georgs forsøg så ikke kan lykkes.

b. Løsning med konflikttabel (graf)

- Det giver 1 point at angive præcis hvilke par af tal der ikke kan ligge i samme bunke, eventuelt i form af en graf.
- Det giver yderligere 2 point at nævne den kreds i konflikttabellen eller grafen som går gennem tallene 1, 3, 6, 10 og 15.
- Det giver yderligere 1 point at argumentere klart for at eksistensen af denne kreds medfører at Georgs forsøg ikke kan lykkes.

Opgave 2

- Der gives 1 point for en tilstrækkeligt begrundet bestemmelse af alle de vinkler som indgår i en metode til bestemmelse af $|AB|$. Dette point gives ikke hvis nogle vinkler er utilstrækkeligt begrundet, men de følgende point kan så opnås hvis deltageren gør rigtige antagelser om vinklernes størrelse.

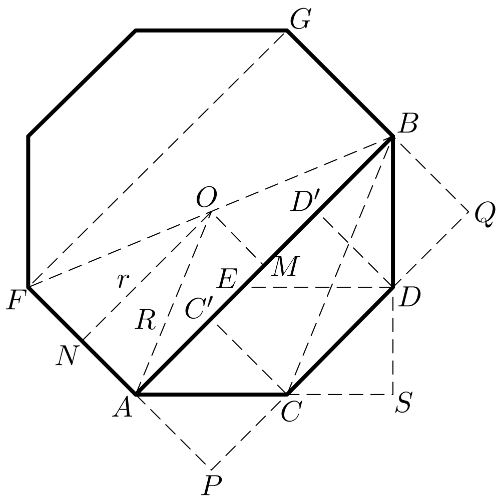
Bemærkning: Det kræves specielt begrundet at en vinkel er ret, hvis dét benyttes. Det er tilstrækkeligt at vinklerne angives indirekte med udsagn som »Trekant … er retvinklet og ligebenet« og »Firkant … er et rektangel«.

- Det giver 1 point at opstille og udtømmende begrunde alle de relationer mellem størrelser som indgår i en metode til bestemmelse af $|AB|$.
- Der gives yderligere 1 point for en rigtig udledning af et rigtigt udtryk for $|AB|$ af disse relationer.
- Det giver yderligere 1 point at reducere et sådant udtryk til $1 + \sqrt{2}$.

Bemærkning: Det kræves ikke bevist at forholdet mellem kateten og hypotenusen i en ligebenet retvinklet trekant er $1 : \sqrt{2}$.

Løsningsmetoder (betegnelserne er forklaret ved figuren)

1. Med ligebenet retvinklet trekant
   1.1. $\triangle BDE$, $|AB| = |AE| + |EB| = |CD| + |EB|$
   1.2. $\triangle ACP$ og $\triangle BDQ$, $|AB| = |PQ| = |PC| + |CD| + |DQ|$
   1.3. $\triangle ACC'$ og $\triangle BDD'$, $|AB| = |AC'| + |C'D'| + |D'B| = |AC'| + |CD| + |D'B|$
   1.4. $\triangle CDS$ og $\triangle ABS$, $|AS| = |AC| + |CS|$, AB hypotenuse i $\triangle ABS$
2. Med trekant hvor AB er en side
   2.1. $\triangle ABF$, $|AB| = \dfrac{\sin 67,5°}{\sin 22,5°}$ eller $|AB| = \tan 67,5°$
   2.2. $\triangle ABC$, $|AB| = \dfrac{\sin 112,5°}{\sin 22,5°}$



$ACDB$ er den korteste del af ottekantens omkreds fra A til B.
C' og D' er projektionerne af C og D på AB.
E ligger på AB så $ED \parallel AC$.
F og G er ottekantens hjørner modsat B og A.
M og N er midtpunkterne af AB og AF.
O er ottekantens midtpunkt.
P, Q og S er skæringspunkterne mellem forlængelserne af FA og DC, GB og CD og AC og BD.
$R = |AO|$, $r = |NO|$.

3. Med R

   $|AB|$ udtrykkes ved R på én af følgende måder.

   $\triangle ABO$, sinusrelationen: $|AB| = R\dfrac{\sin 135°}{\sin 22,5°}$
   $\triangle ABO$, cosinusrelationen: $|AB| = R\sqrt{2 - 2\cos 135°}$
   $\triangle ABO$, arealbetragtning givet $|MO| = |AN| = \frac{1}{2}$ (se punkt 4): $|AB| = 2R^2 \sin 135°$
   Fx $\triangle AFO$, arealbetragtning givet $|AB| = 2r$ (se punkt 4): $|AB| = 2R^2 \sin 45°$

   R bestemmes af en trekant som $\triangle AFO$ på én af følgende måder.

   Sinusrelationen: $R = \dfrac{\sin 67,5°}{\sin 45°}$
   Cosinusrelationen: $R = \dfrac{1}{\sqrt{2 - 2\cos 45°}}$

4. Med r

   Forholdet mellem kateterne i en trekant som $\triangle ANO$ findes som i løsning 2.1.
   $|AN| = \frac{1}{2}$ og $|AB| = 2r$ fås af symmetri, af ensvinklede trekanter eller ved at udnytte at O er midtpunkt i rektangel $ABGF$.

Opgave 3

a. Løsninger der benytter største fælles divisor d for n og m

- Opnå én af ligningerne $\dfrac{d}{11} = \dfrac{n' + m'}{n'm'}$, $\dfrac{11}{d} = \dfrac{n'm'}{n + m'}$ eller $dn'm' = 11(n' + m')$, hvor $n' = n/d$ og $m' = m/d$: 1 point
- Udlede $n'm' \mid 11$: yderligere 1 point
- Finde alle løsninger til denne relation og udelukke $n' = m' = 1$: yderligere 1 point
- Regne n og m ud: yderligere 1 point

b. Løsninger der bygger på at 11 går op i n eller m

- Vise at 11 går op i n eller m: 1 point
- Antage at 11 går op i n, sætte $n = 11n''$ og udlede $n'' - 1 \mid 11$: yderligere 1 point
- Finde alle løsninger til denne relation og udelukke $n'' = 2$: yderligere 1 point
- Beregne n og m for $n'' = 12$: yderligere 1 point

c. Løsninger der bygger på at hvis n er det mindste af tallene n og m, er $11 < n < 22$

- Vise at hvis n er det mindste af tallene n og m, gælder $11 < n < 22$: 1 point
- Heraf udlede $n - 11 \mid n$ eller udregne brøkerne $\dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{n}$ for $n = 12, 13, \ldots, 21$ og påvise at ingen af dem kan forkortes mere end til $\dfrac{n-11}{11n}$, eller tilsvarende: yderligere 2 point
- Heraf udlede $n = 12$ og $m = 132$: yderligere 1 point

d. Løsninger der bygger på $12 \leq n, m \leq 132$

- Vise $12 \leq n, m \leq 132$: 1 point
- Vise $11 \nmid n \Rightarrow n = 12$ eller $n > m \Rightarrow 11 \mid n$: yderligere 1 point
- Ved udregning af $\dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{n}$ for $n = 22, 33, \ldots, 132$ eller på anden måde påvise at for disse n er $\dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{n}$ kun er en stambrøk i tilfældene $n = 22$ og $n = 132$, og udelukke $n = 22$: yderligere 1 point
- Beregne m for $n = 132$ og hvis $n > m$ ikke er forudsat, for $n = 12$: yderligere 1 point

Bemærkning: Hvert af svarene »kun som $\frac{1}{12} + \frac{1}{132}$«, »kun som $\frac{1}{132} + \frac{1}{12}$« og »som $\frac{1}{12} + \frac{1}{132}$ eller $\frac{1}{132} + \frac{1}{12}$« regnes for rigtigt.

Opgave 4

a. Løsning med polynomier

- Opnå en faktorisering af $f(f(x)) - x$ som indeholder faktoren $x^2 - x - 1$: 3 point

  Herindenfor kan der gives følgende delpoint, hvor point fra de forskellige pinde ikke kan kombineres:

  - 1 point for at begrunde at enhver rod i $f(x) = x$ er rod i $f(f(x)) = x$, og yderligere 1 point for at udlede at $f(x) - x$ er faktor i polynomiet $f(f(x)) - x$.
  - 1 point for at vise at 0 og 3 er rødder i $f(f(x)) - x$ og yderligere 1 point for at udlede at $x(x-3)$ eller $x^2 - 3x$ er faktor i polynomiet.
  - 2 point for omskrivningen $f(f(x)) - x = f(x)^2 - 2f(x) - x = f(x)^2 - f(x) - x^2 + x = (f(x) - x)(f(x) + x - 1)$.

- Påvise at $x^2 - x - 1$ har reelle rødder hvoraf mindst én ikke opfylder $f(x) = x$: yderligere 1 point

b. Funktionsundersøgelse

- Det giver 2 point at vise at der i ét af intervallerne $]-\infty; 0[$ og $]0; 3[$ findes både et tal x så $f(f(x)) > x$ og et tal x så $f(f(x)) < x$.

Bemærkning: Dette kan gøres ved udregning af enkelte funktionsværdier i intervallet eller overvejelser om monotoni. 1 af de 2 point kan gives hvis deltageren ses at have til hensigt at udføre dette program men for eksempel argumenterer utilstrækkeligt for en grænseværdi eller ikke kan bestemme de nødvendige differentialkvotienter.

- Det giver yderligere 1 point at konkludere at der så i det pågældende interval findes et tal a så $f(f(a)) = a$.

- Det giver yderligere 1 point at vise $f(a) \neq a$.

Opgave 5

- Vise at b^2 eller c^2 ikke kan have sidste ciffer 0: 1 point

- Udlede $c > 10a$: yderligere 1 point

- Derudfra afgrænse en lille mængde af mulige c eller en lille mængde af mulige a: yderligere 1 point

- Vise at i der i denne mængde kun er én mulig løsning, og bestemme $(a, b, c) = (1, 4, 13)$: yderligere 1 point