Kommentarer til opgavesættet ved Georg Mohr-Konkurrencen 2010, anden runde.

Af arbejdsgruppen vedr. Georg Mohr-Konkurrrencen, 31. januar 2010.

Nu foreligger resultatet af Georg Mohr-Konkurrencen 2010.
Vi kan konstatere at konkurrencen som helhed har opfyldt det ene af sine formål, nemlig at skille i toppen som en konkurrence jo skal. Vi har resultater i hele spektret, og det er flot at nogle deltagere nåede så højt op som de gjorde. Opgavesættet var nemlig ikke let.

Men de mange lave pointtal, og specielt det store antal der opnår under 4 point, giver naturligvis anledning til overvejelser. I arbejdsgruppen er vi udmærket klar over at elever kan være virkelig dygtige til matematik i hverdagen uden at score særlig højt i denne konkurrence. Vi håber at både lærere og elever husker på dette når resultaterne læses!

Nogle af eleverne er nok nysgerrige efter hvad det så er der gør forskellen på en besvarelse der scorer højt, og en der ikke gør det, og benytter lejligheden til at tale med deres lærere om hvad matematik også kan være. Især til lærerne knytter vi nedenfor nogle kommentarer til de enkelte opgaver.

Opgave 1

Denne opgave er ikke meget langt fra opgaver som også stilles i gymnasiet, men der viste sig at være elementer i den som var sværere end vi havde forudset.

Allerede ved starten, at identificere radius i den lille cirkel som højden på hypotenusen i de oprindelige trekanter, taber vi mange. Her skal man komme i tanker om at udnytte at tangenten står vinkelret på radius i røringspunktet, selv om den relevante radius i første omgang slet ikke forekommer på tegningen. Nogle klarer sig igennem med forskellige andre hjælpelinjer. Temmelig mange elever tror at radius er 1, selv om man på deres tegning tydeligt kan se at det ikke kan passe.

Blandt dem der kommer godt i gang, tabes så yderligere nogen undervejs. Det kan knibe med at beregne højden uden brug af de sædvanlige hjælpemidler (vinkler og trigonometri og lommeregner). Nogle måler, andre påstår bare uden begrundelse at den er 1 eller 1,5. Senere kniber det med at beregne forholdet, og den afsluttende hurdle, at reducere et besværligt udtryk, rammer også enkelte.

Alt i alt har vi her en opgave som skiller eleverne udmærket, men som viste sig at være lidt for svær som indgangsopgave.

Et enkelt problem med formuleringen af opgaven opdagede vi først under rettearbejdet: nogle elever læser tallene 1 og 2 i "retvinklede trekanter med kateterne 1 og 2" som en ren nummerering. Det burde vi have undgået ved at skrive "retvinklede trekanter med katetelængderne 1 og 2".

Opgave 2

En velfungerende opgave som skiller eleverne på en fair måde.

Nogle elever forstår simpelt hen ikke opgaven. De springer den over, eller de fortæller os hvorfor vi kan være sikre på at når a, b og c er hele tal, så er også $n = a^2 + b^2 - c^2$ et helt tal. Dette er jo at vende problemstillingen om, og det giver 0 point. Det handler om at påvise at der til et givet n findes hele tal a, b og c så at $n = a^2 + b^2 - c^2$.

En del elever ser på et system med differenser mellem på hinanden følgende kvadrattal. En del skriver kvadrattallene og deres differenser op og siger "se her!". Det er ikke helt nok - jf. kommentarerne nedenfor til opgave 5, der viser at man kan gå galt i byen med et tilsyneladende system. Men her er det i orden hvis man enten nævner at det er kendt (for det er det jo), eller beviser at det holder, ved at udregne $(m+1)^2 - m^2$. Herefter er der stadig et stykke vej til målet, men opgaven er velegnet som konkurrenceopgave fordi det er let at se hvornår en løsning er fuldstændig, eller alternativt se hvad der mangler (f.eks. de negative tal eller de lige tal). Der er givet alt fra 0 til 4 point i denne opgave. En hel del elever klarer opgaven til fuldt point.

Opgave 3

Denne opgave kræver en helt anden type tankegang end sættets øvrige opgaver. De fleste får meget hurtigt en tydelig, og korrekt, fornemmelse af at det ikke kan lade sig gøre. Men derfra og så til at gøre rede for hvorfor det ikke kan lade sig gøre, er der et godt stykke vej.

I den første fase af arbejdet med opgaven sidder man typisk og pusler med forskellige mulige opstillinger og opdager at de giver problemer stort set lige meget hvad man forsøger. Men dette er ikke i sig selv et bevis for at det ikke kan lade sig gøre. Man arbejder måske med opstillinger af typen PPDDPPDD og får så et problem i den sidste ende af kæden. Men hvem siger at et problem i slutningen ikke kunne have været undgået hvis man havde startet anderledes? (Til sammenligning: Alle ved jo at hvis man løser sudoku, kan man ikke bare gå i gang med at fylde tal ind så det passer undervejs - før eller siden risikerer man at skulle trævle det hele op igen for at starte helt anderledes.)

I anden fase, som er nødvendig for at opgaven er løst, skal der arbejdes meget systematisk. Og her kniber det for langt de fleste at holde tungen lige i munden. Den mest farbare vej er at foretage en analyse. Grundidéen i den analytiske metode er man antager at der foreligger en løsning på problemet, og alene derfra, altså uden at antage nogen som helst ting om hvordan en sådan løsning er kommet til verden, udleder konsekvenser. Eksempelvis kan man slutte sig til at hvis man har at gøre med en opstilling der dur, så kan en pigesekvens inde i kæden højst bestå af to piger, og en drengeskvens inde i kæden må bestå af mindst to drenge. Ved at videreføre analysen kan man nå frem til at opstillingen ikke er mulig.

Opgaven kræver ganske stor matematisk modenhed. Den forståelse af matematik som gør at vi ved at man ikke kan blande en konstruktion med en analyse, har kun få elever. Det store flertal af elever får 0 point i denne opgave eller et enkelt for en (præcist formuleret) idé.

Opgave 4

En god klassisk geometriopgave, som mange elever gør noget ved. En del elever kommer desværre på afveje når de på et eller andet tidspunkt tror at de tre vinkler som A deles i, er lige store. (I parentes bemærket ville dette jo betyde at man kunne vinkeltredele denne vinkel med passer og lineal). Selv uden denne faldgrube kan det være svært at få fuldt point i denne opgave fordi alle argumenter skal være i orden.

Opgave 5

Det er en svær opgave. Men det skal en opgave 5 også være. En lille håndfuld elever har faktisk løst denne opgave helt korrekt.

Det store flertal af elever begynder at skrive toerpotenser op. Mange synes at de opdager et system; det ser nemlig ud til at hvert tiende tal begynder med 4. Men systemet holder ikke, og der gives 0 point for at tro på det. Grunden til at det nogenlunde passer, i hvert fald så langt som man kan overkomme at regne i hånden, er at man ganger med 2^10 = 1024 for hver gang man går ti pladser frem. Men 1024 er jo ikke præcis 1000, så på et eller andet tidspunkt er "fejlen" så stor, at der dukker et tal op der begynder med 5.
(Tallene 2^2, 2^{12} , ..., 2^{92} begynder alle med 4, men tallet 2^{102} begynder med 5).