

Georg Mohr-Konkurrencen 2009, anden runde

Løsningskitse

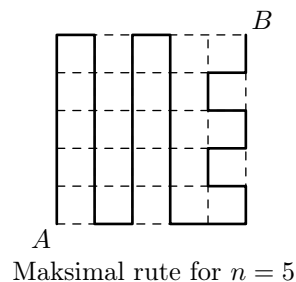
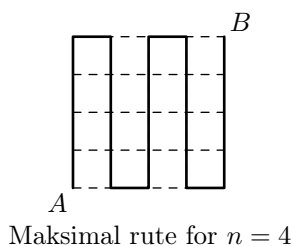
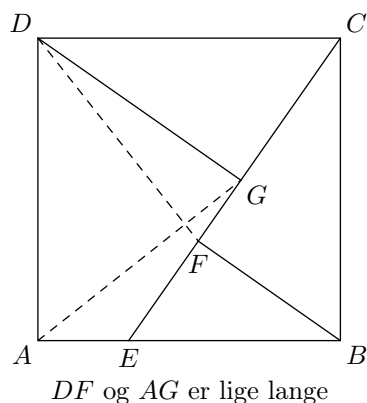
Opgave 1. Lad F være skæringspunktet mellem AC og BD . Da v er nabovinkel til vinkel F i trekant CBF , er $v = \angle C + \angle CBF = \angle E + (\angle ABC - \angle ABD) = 40^\circ + (60^\circ - 45^\circ) = 55^\circ$. Her er benyttet at trekant ABD er retvinklet og ligebenet, og dermed $\angle DBA = 45^\circ$.

Opgave 2. Tallene x og $\frac{1}{x+y}$ er løsningerne til ligningen $t^2 - 3t + 2 = 0$, dvs. tallene er 1 og 2 (her benyttes det at $u + v = 3$ og $uv = 2$ hvis og kun hvis u og v er løsningerne til $t^2 - 3t + 2 = 0$). Med $x = 1$ bestemmes y af ligningen $\frac{1}{1+y} = 2$ til $-\frac{1}{2}$. Med $x = 2$ bestemmes y af ligningen $\frac{1}{2+y} = 1$ til -1 . Løsningerne (x, y) er altså $(1, -\frac{1}{2})$ og $(2, -1)$.

Opgave 3. Kald antallet af købte chokolader for n , antallet af chokolader på et fad for m og det overskydende antal for r . Så gælder $n = 60m + r = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m + r$ og $2 \leq r < 60$. Da n er et primtal, og r ikke er det, må n være forskellig fra r , og dermed er $n > 60$. Hvis et af tallene 2, 3, 5 er divisor i r , vil det også være divisor i n , hvilket er umuligt da n er et primtal. Dermed er 7 eneste mulige divisor i r som er større end 1 og mindre end 9. Da r er et sammensat tal mindre end 8^2 , er 7 en divisor i r , dvs. $r = 7 \cdot k$. Her er k en divisor i r som er større end 1 og mindre end 9, altså 7, og dermed $r = 49$. Der er altså 49 stykker chokolade til overs.

Bemærkning: Mulige værdier for n er 109, 229, 349, 409, ...

Opgave 4. Ved en drejning på 90° omkring centrum af kvadratet $ABCD$ så B føres i C , vil C føres i D . Da $BF \perp CG$ og $CF \perp DG$, vil drejningen føre linjen BF i linjen CG og linjen CF i linjen DG . Dermed føres skæringspunktet F mellem linjerne BF og CF i skæringspunktet G mellem linjerne CG og DG . Ved drejningen føres F altså i G og D i A , og dermed føres linjestykket DF i linjestykket AG . De to linjestykker er derfor lige lange.



Opgave 5. Et $n \times n$ -skema indeholder $(n + 1)^2$ gitterpunkter. En øvre grænse for rutelængden er derfor $(n + 1)^2 - 1$ (hvert skridt ender i nyt gitterpunkt). For n lige realiseres en sådan rute let (som på figuren ovenfor i midten). For n ulige er denne rutelængde ulige og kan ikke opnås fordi alle rutelængder er lige (argumentet følger senere). For n ulige er $(n + 1)^2 - 2$ så en øvre grænse for rutelængden, og en sådan rute kan let realiseres (som på figuren ovenfor til højre).

At enhver rute fra A til B har lige længde, indses som følger: Gitterpunkterne på hver lodret og vandret linje farves skiftevis gule og grønne. Hver kant i ruten forbinder punkter med forskellig farve, og da A og B har samme farve, må rutelængden være lige.