Retningslinjer for bedømmelsen.
Georg Mohr-Konkurrencen 2008
2. runde

Det som skal vurderes i bedømmelsen af en besvarelse, er om deltageren har formået at analysere problemstillingen, kombinere de givne oplysninger til et svar på det stillede spørgsmål og argumentere overbevisende og udtømmende for svaret. Derimod er det ikke i sig selv væsentligt i hvilken grad deltageren viser beherskelse af matematikkens formelle apparat eller færdigheder inden for skolernes pensum.

Der kan gives indtil 4 point for hver af de 5 opgaver. En helt korrekt og fuldstændig besvarelse giver 4 point, og der gives ikke fuldt pointtal medmindre besvarelsen er i alt væsentligt korrekt og fuldstændig. For en delvis korrekt besvarelse eller blot skridt eller ideer som leder i retning af en løsning, kan der gives et eller flere point. Derimod giver regninger eller argumenter som ikke bringer deltageren nærmere en løsning, ikke point uanset om de er rigtige i sig selv. Tilfældige indfald uden funktion i sammenhængen tæller ikke i sig selv positivt ved bedømmelsen.

Bedømmelsen har til formål at fastslå hvem der har løst opgaverne bedst. Derfor skal kun konkrete skridt i retning af en løsning honoreres, og det skal ikke tages i betragtning om deltageren i øvrigt synes at have ydet en anerkendelsesværdig indsats.

Opgave 1

Uden argumenter giver svarene "Ja.", "Ja, Georgien scorede det femte mål." og "Nej." alle 0 point. En argumentation for svaret nej kan indeholde delargumenter som også indgår i en argumentation for det rigtige svar. Der kan så gives point for disse delargumenter.

Det giver 4 point at bevise at svaret på opgaven er bekræftende idet det femte mål nødvendigvis scores af Georgien, og argumentere fuldstændigt herfor. Det må altså udelukkes at nogen målfølge hvor Danmark scorer det femte mål, er forenelig med de givne oplysninger. Der kræves ikke bevis for eksistensen af en målfølge der opfylder beskrivelsen.

For dele af en sådan fuldstændig løsning kan der gives point som følger.

- 1 point gives når deltageren tydeligt sætter sig som mål at argumentere for svaret ja og tydeligt indser at dette kræver udelukkelse af enten enhver målfølge hvor Danmark scorer det femte mål, eller enhver målfølge hvor Georgien scorer det femte mål. Dette behøver ikke være formuleret eksplicit, men skal fremgå af tilgangen til opgaven.
- De 3 øvrige point gives for skridt mod en fuldstændig udelukkelse af Danmark som femte målscorer. Dette resultat kan opnås på umådelig mange forskellige måder ved at

kombinere dele af de givne oplysninger. Næsten enhver slutning opnået ved at kombinere nogle få af oplysningerne kan være første skridt af et fuldstændigt bevis.

Dele af disse 3 point kan opnås som følger.

- 1 point for at nå frem til nogenlunde sammensatte beskrivelser af dele af målfølgen. Eksempler: Samme hold scorer de to første mål, og det andet hold scorer det tredje mål. Samme hold scorer de to sidste mål, og det andet hold scorer det tredjesidste mål. Samme hold scorer ikke alle de tre første mål, og hvis Danmark scorer det femte mål, scorer Georgien det fjerde.
- 2 point for at nå frem til en beskrivelse af målfølgen som med få ekstra skridt fører til en fuldstændig udelukkelse af Danmark som femte målscorer. Eksempler: Hvis Danmark scorer det første mål, er de seks første mål DDGDGD. Hvis Danmark scorer det femte mål, scorer Georgien det fjerde og et af de tre første.

Sådanne point forudsætter en fuldstændig argumentation for resultaterne. En deltager der uden argumentation anfører at de seks første mål enten er DDGDGD eller GGDG-GD, eller at de seks sidste mål enten er GDDGDD eller GDGDGG, kan opnå det ene af de tre point.

Opgave 2

- Det giver 1 point at skrive at 6 går op i pqr når 2 går op i en af faktorerne, og 3 går op i en af faktorerne.
- Det giver 1 point at vise at mindst et af de tre tal er lige.
- Det giver 2 point at vise at mindst et af de tre tal er deleligt med 3.

  Delpoint: Man kan få 1 af disse 2 point for væsentlige fremskridt mod et fuldstændigt bevis. Eksempler: 1) Arbejde med specifikke antagelser om tallenes rest ved division med 3 i forbindelse med omskrivningen $p = (r+q)(r-q)$. 2) Antage at to af tallene ikke er delelige med 3, og skrive disse tal på formen $3n \pm 1$. 3) Foretage omskrivninger såsom $p = (r+1)(r-1) - (q+1)(q-1)$ eller $pqr = qr(r-1)(r+1) - qr(q-1)(q+1)$ og gøre sig overvejelser om leddenes delelighed med 3 under nærmere angivne forudsætninger.

Opgave 3

Der findes mange strategier der sikrer B sejren.

En fuldstændig løsning skal indeholde følgende:

- Beskrivelse af strategi.
- Bevis for at strategien er mulig.
- Bevis for at strategien virker.

For ikke fuldstændige besvarelser gives point på følgende måde:

- En deltager der blot skriver at B har en vindende strategi, at A har, eller at ingen af dem har, uden yderligere argumentation, opnår 0 point.
- En deltager der skriver at B har en vindende strategi, og beskriver en sådan, men ikke beviser at strategien er mulig, og at den virker, opnår 2 point.
- En deltager der skriver at B har en vindende strategi, beskriver en sådan samt beviser at den er mulig, men ikke beviser at den virker, opnår 3 point.
- En deltager der skriver at B har en vindende strategi, beskriver en sådan samt beviser at den virker, men ikke beviser at den er mulig, opnår 3 point.
- En deltager der skriver at ingen af deltagerne har en vindende strategi, eller at A har en vindende strategi, eller angiver en forkert strategi for B, kan opnå 1, eventuelt 2 point hvis dele af argumentationen indeholder korrekte argumenter der er skridt i retning af en korrekt besvarelse.

Opgave 4

Hvis der i en besvarelse benyttes kendte sætninger uden for skolernes pensum, fx sætningen om at vinkelhalveringslinjen deler den modstående side i de hosliggendes forhold, eller additionsformler for trigonometriske funktioner, kræves disse sætninger ikke bevist.

Længden $|AD|$ skal angives som brøk med hele tal i tæller og nævner. Det er ikke et krav at brøken er forkortet til mindst mulige tæller og nævner, og der skal derfor ikke trækkes fra i bedømmelsen hvis dette ikke er sket.

a. Løsning vha. ensvinklede trekanter

- Det giver 1 point at tegne linjer så man opnår to ensvinklede trekanter der kan benyttes i en løsning, fx lade E være et punkt på forlængelsen af AC så trekant EAB bliver ligesidet, lade E være et punkt på siden AC så trekant EAD bliver ligesidet, eller lade E være et punkt på forlængelsen af AD så trekant ABE bliver ligesidet.
- Det giver yderligere 1 point at bevise at trekanterne er ensvinklede.
- Det giver yderligere 1 point at udnytte at tegningen indeholder en ligesidet trekant.
- Det giver yderligere 1 point at vise $|AD| = \frac{3}{2}$ ud fra det foregående.

b. Løsning vha. arealer

- Det giver 1 point at bemærke sammenhængen $T_{\triangle ABD} + T_{\triangle ACD} = T_{\triangle ABC}$ eller (fx med brug af sætningen om deling af den modstående side) opnå sammenhængen $T_{\triangle ABD} = \frac{|AB|}{|AB|+|AC|} T_{\triangle ABC}$ eller betragte en tilsvarende sammenhæng mellem arealer.
- Det giver yderligere 1 point at udtrykke denne sammenhæng med brug af arealformlen med sinus.
- Det giver yderligere 1 point at udnytte at der gælder $\sin \frac{A}{2} = \sin A$ fordi $A = 120°$.
- Det giver yderligere 1 point at vise $|AD| = \frac{3}{2}$ ud fra det foregående.

c. Løsning vha. sinusrelationen

- Der gives 1 point for den ide at udtrykke $|BD|$ og/eller $|CD|$ ved $|AD|$ med henblik på elimination med brug af $|BD|+|CD| = |BC|$, $|BD| = \frac{|AB|}{|AB|+|AC|}|BC|$ eller en tilsvarende ligning.
- Det giver yderligere 1 point at vise $|BD| = \frac{|BC||AD|\sin\frac{A}{2}}{|AC|\sin A}$ og/eller $|CD| = \frac{|BC||AD|\sin\frac{A}{2}}{|AB|\sin A}$, fx ved at benytte sinusrelationen to gange, eller nå frem til lignende resultater der er væsentlige skridt i retning af at udregne $|AD|$.
- Det giver yderligere 1 point at udnytte at der gælder $\sin\frac{A}{2} = \sin A$ fordi $A = 120°$.
- Det giver yderligere 1 point at vise $|AD| = \frac{3}{2}$ ud fra det foregående.

d. Trigonometrisk løsning

- Udregne $|BC| = 2\sqrt{13}$: 1 point.
- Yderligere 1 point: Udregne $\cos B = \frac{5}{2\sqrt{13}}$, $\cos C = \frac{7}{2\sqrt{13}}$, $\sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$, $|BD| = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $|CD| = \frac{3\sqrt{13}}{2}$, $\sin\angle ADB = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ eller $\sin\angle ADC = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.
- Yderligere 1 point: Udregne to af $\cos B$, $\cos C$, $\sin B$, $\sin C$, $|BD|$, $|CD|$, $\sin\angle ADB$ og $\sin\angle ADC$ der kombineret gør det muligt nemt at beregne $|AD|$. Fx $\cos B$ og $|BD|$, $\sin B$ og $|BD|$ eller $\sin B$ og $\sin\angle ADB$. Eller udregne både $\sin B$ og $\sin C$ samt opstille ligningerne $|BD| = \frac{|AD|\sin\frac{A}{2}}{\sin B}$ og $|CD| = \frac{|AD|\sin\frac{A}{2}}{\sin C}$.
- Det sidste point opnås ved at beregne $|AD| = \frac{3}{2}$ på grundlag af det foregående.

BEMÆRKNING: Da det er målet at udtrykke $|AD|$ som rationalt tal, gives der ved trigonometrisk løsning kun point når størrelser som ikke elimineres, udtrykkes som algebraisk tal som ovenfor.

Opgave 5

- Det giver 0 point at gætte på at t_{2008} har 2009 cifre, ud fra enkelte værdier af t_n.
- Det giver 1 point hvis besvarelsen indeholder ideen om at se på produktet $x = 2^{2008}5^{2008}$ eller en af relationerne $5^{2008} = 10^{2008}/2^{2008}$ og $2^{2008} = 10^{2008}/5^{2008}$ eller fx i en besvarelse som benytter induktion, produktet 2^n5^n eller en af relationerne $5^n = 10^n/2^n$ og $2^n = 10^n/5^n$.
- De resterende 3 point gives for herudfra at bevise at t_{2008} har 2009 cifre.

  Delpoint:

  - 1 af de 3 point kan opnås ved at bevise $10^{p+q-2} \le x < 10^{p+q}$, $p+q-2 \le \log x < p+q$, $p+q-1 \le r \le p+q$, $10^{2008-p} < 5^{2008} \le 10^{2009-p}$ eller tilsvarende, hvor p, q og r betegner antallet af cifre i henholdsvis 2^{2008}, 5^{2008} og x. Eller de kan fås ved at nå et resultat undervejs mod at bevise at t_{n+1} har præcis et ciffer mere end t_n, fx i form af en sammenhæng mellem første ciffer af tallene 2^n og 5^n.

- 2 af de 3 point kan opnås ved at bevise $10^{p+q-2} < x < 10^{p+q}$, $p+q-2 < \log x < p+q$, $10^{2008-p} < 5^{2008} < 10^{2009-p}$ eller tilsvarende, eller at t_{n+1} har præcis et ciffer mere end t_n.