Georg Mohr-Konkurrencen 2008, anden runde

Løsningsskitse

Opgave 1. Antag at Danmark scorede det femte mål. Så scorede Georgien fjerde mål da ingen af holdene har scoret tre gange i træk. Af samme grund har ét af holdene scoret netop to af de tre første mål. Hvis Danmark scorede to af de tre første mål, ville det stå lige efter fjerde scorede mål. Umuligt! Hvis Georgien scorede to af de tre første mål, ville kampen stå lige efter sjette scorede mål. Umuligt!
Eneste mulighed er at Georgien scorede det femte mål.

Opgave 2. Ligningen omformes til $p = (r-1)(r+1) - (q-1)(q+1)$, og dermed er $pqr = q \cdot (r-1)r(r+1) - r \cdot (q-1)q(q+1)$. Da primtallene 2 og 3 altid går op i produktet af tre på hinanden følgende hele tal, så gør 6 ($=2 \cdot 3$) det også. Altså går 6 op i tallene $q \cdot (r-1)r(r+1)$ og $r \cdot (q-1)q(q+1)$, og dermed i pqr.

Opgave 3. Svar: B. De 500 tal opdeles i 250 par $(n, 501-n)$ for $n = 1, 2, \ldots 250$. Når A sletter ét tal fra et par, så sletter B det andet. For alle par er summen af tallene i parret 501, og dette tal er deleligt med 3. De sidste to tal der står på tavlen, er tallene i ét af de 250 par, og dermed har B vundet.

Opgave 4. 1. metode:
Lad E være punktet på AC's forlængelse så trekant EAB er ligesidet. Dermed bliver trekanterne EBC og ADC ensvinklede. Forstørrelsesfaktoren er $\frac{|AC|}{|EC|} = \frac{6}{2+6} = \frac{3}{4}$.
Dermed er $|AD| = \frac{3}{4}|EB| = \frac{3}{2}$.
2. metode:
Sæt $d = |AD|$. Arealet af trekant ABC er lig arealet af trekant ACD plus arealet af trekant ADB. Dermed er $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bd \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}cd \sin \frac{A}{2}$. Med $\angle A = 120°$ er $\sin A = \sin \frac{A}{2}$, og dette sammen med værdierne for b og c forenkler ligningen $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bd \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}cd \sin \frac{A}{2}$ til $6 \cdot 2 = 6d + 2d$, og dermed er $d = \frac{3}{2}$.

Opgave 5. Antallet af cifre i tallene 2^{2008} og 5^{2008} betegnes henholdsvis p og q. Vi søger altså tallet $p+q$. Tallene p og q er også bestemt ved dobbeltulighederne $10^{p-1} < 2^{2008} < 10^p$ og $10^{q-1} < 5^{2008} < 10^q$. Dermed gælder $10^{p-1} \cdot 10^{q-1} < 2^{2008} \cdot 5^{2008} < 10^p \cdot 10^q$. Dette omformes til $10^{(p+q)-2} < 10^{2008} < 10^{p+q}$, og yderligere til $(p+q) - 2 < 2008 < p+q$. Heraf sluttes $p+q = 2009$. Dermed er der 2009 cifre i tallet t_{2008}.