Løsningsskitser til Georg Mohr-konkurrencen 2007, anden runde

Opgave 1. Lad O være tikantens midtpunkt. Punktet O er midtpunktet af AB. Ved at forbinde O med alle tikantens hjørner opdeles tikanten i 10 kongruente trekanter. Dermed udgør arealet af trekant AOC en tiendedel af tikantens areal. Arealet af trekant ABC er dobbelt så stor som arealet af trekant AOC, da grundlinjen AB i trekant ABC er dobbelt så stor som grundlinjen AO i trekant AOC, og højden fra C er ens. Dermed udgør arealet af trekant ABC to tiendedele $(=\frac{1}{5})$ af hele tikantens areal.

Opgave 2. Sidste ciffer (=slutciffer) i et produkt er lig sidste ciffer i produktet af faktorernes slutcifre. Dette følger af følgende identitet $(10a+b)(10c+d) = 10(10ac+bc+ad)+bd$.
2007^2 har samme sidste ciffer som 7^2, dvs. 9.
2007^3 har samme sidste ciffer som $9 \cdot 7$, dvs. 3.
2007^4 har samme sidste ciffer som $3 \cdot 7$, dvs. 1.
$2007^{2007} = (2007^4)^{501} \cdot 2007^3$ har samme sidste ciffer som $1^{501} \cdot 3$, dvs. 3.

Opgave 3. Feltet i n'te række og m'te søjle betegnes (n, m). Der skal placeres syv tal fra 5-tabellen, hvoraf det ene allerede er placeret i feltet $(5, 2)$. Antag at opgaven er løst. Betragt nu følgende tre nordvestlige ruter $(1, 1)$, $(2, 1)-(2, 2)-(1, 2)$ og $(3, 1)-(3, 2)-(2, 2)-(2, 3)-(1, 3)$. Disse tre ruter må hver indeholde et 5-tabelstal, og da feltet $(2, 2)$ (eneste overlap) er optaget af et ikke-5-tabelstal, har vi hermed disponeret over tre 5-tabelstal.
Til de tre tilsvarende ruter i det sydøstlige hjørne bruges ligeleds tre 5-tabelstal.
Med det af dragen placerede 5-tabelstal er der nu disponeret over alle syv 5-tabelstal. Et blik på søjlehallen viser at man kan finde en 5-tabelsfri rute, f.eks. ind fra $(4, 1)$ mod øst indtil $(4, 4)$, derpå mod nord og ud ved $(4, 4)$. Altså har vi en modstrid, og opgaven kan ikke løses. Georg kan ikke vinde prinsessen.

Opgave 4. Toppunktet i den givne vinkel på $60°$ betegnes O.
Metode 1. Lad O_n og r_n betegne henholdsvis centrum og radius for cirkel nummer n. Punktet A er valgt så trekant $O_nO_{n+1}A$ er retvinklet med den rette vinkel i A, og O_nA er parallel med ét af vinkel O's ben. Da O_n og O_{n+1} ligger på vinkel O's vinkelhalveringslinje, er $\angle O_{n+1}O_nA = 30°$. Dermed $\frac{1}{2} = \sin 30° = \frac{|O_{n+1}A|}{|O_nO_{n+1}|} = \frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}+r_n}$. Løsning af denne ligning giver $r_{n+1} = 3r_n$. Dermed er $r_{2007} = 1 \cdot 3^{2007-1} = 3^{2006}$.
Metode 2. Lad H_n være det fælles røringspunkt mellem cirkel nummer n og cirkel nummer $n+1$. Tangenten i H_n skærer vinkel O's ben i A_n og B_n. Trekant OA_nB_n er ligesidet, da højde og vinkelhalveringslinje fra O er sammenfaldende og vinkel O er $60°$. Da højder, vinkelhalveringslinjer og medianer er sammenfaldende i en ligesidet trekant, er den indskrevne cirkels radius i en sådan trekant $\frac{1}{3}$ af højden. Dermed $|OH_{n-1}| = r_n = \frac{1}{3} \cdot |OH_n| = \frac{1}{3} \cdot r_{n+1}$. Dermed fås igen $r_{2007} = 3^{2006}$.

Opgave 5. Vi indser først at følgen er voksende. Antag det modsatte, nemlig at der findes mindst ét n så $a_{n+1} \leq a_n$, og lad N være det mindste af disse tal. Så vokser a_n med n for $0 \leq n \leq N$. Da N nødvendigvis er ulige, har vi dermed $a_{N+1} = 3a_{(N+1)/2} \geq 3(a_{(N-1)/2}+1) = a_{N-1}+3 = a_N+2 > a_N$. Modstrid!
Antallet af a_n mindre end 2007 er så lig med $m+1$, hvor m er det største tal som opfylder at $a_m < 2007$. For $n = 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ har vi $a_n = 0, 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187$, hvor det sidste tal er større end 2007. Altså $m < 128$. Tallet a_{127} beregnes således: $a_1 = a_0+1 = 1$, $a_3 = 3 \cdot a_1 + 1 = 4$, $a_7 = 3 \cdot a_3 + 1 = 13$, $a_{15} = 3 \cdot a_7 + 1 = 40$, $a_{31} = 3 \cdot a_{15} + 1 = 121$, $a_{63} = 3 \cdot a_{31} + 1 = 364$, $a_{127} = 3 \cdot a_{63} + 1 = 1093$. Da dette tal er mindre end 2007, er $m = 127$. Antallet af a_n mindre end 2007 er så lig med 127+1=128.