

Georg Mohr-Konkurrencen 2006, anden runde

Løsningskitse

Opgave 1. Sekskanten $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ består af 6 ligesidede trekanter med sidelængde 1. Arealet er så arealet af disse 6 trekanter minus arealet af 6 halve kvadrater med diagonallængde 1.

Resultat: $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}-3}{2}$.

Opgave 2. Antag (x, y, z) er en løsning til ligningssystemet. Så gælder $z^2 = xy - 1 = x(2-x) - 1 = -(x-1)^2$. Her er startudtrykket ikke negativt, og slutudtrykket ikke positivt. Derfor er $z = 0$ og $x = 1$. Dette sammenholdt med $x + y = 2$ viser at $x = y = 1$ og $z = 0$. Altså er $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ eneste mulige løsning. Det ses umiddelbart at $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ er en løsning.

Opgave 3. Når sandsynligheden er $\frac{1}{100}$ for at et tilfældigt tal fra mængden $\{1, 2, 3, \dots, 499, 500\}$ går op i n , må n have præcis 5 divisorer. Et tal med primfaktoropløsningen $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ har $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ divisorer, dvs. $n = p^4$ for et primtal p . Det størst mulige n er derfor $n = 3^4 = 81$ ($5^4 > 500$).

Opgave 4. Antag at tallene a_0, a_1, \dots, a_9 er 10 forskellige tal fra mængden $M = \{1, 2, \dots, 2006\}$ med en sum mindre end 10030. Tallene $b_i = 2007 - a_i$ for $i = 0, 1, 2, \dots, 9$ er så også 10 forskellige tal fra M , og deres sum er større end 10040. ($\sum_{i=0}^9 b_i = 10 \cdot 2007 - \sum_{i=0}^9 a_i > 20070 - 10030 = 10040$). Da forskellige valg af a_i 'er giver forskellige b_i 'er, er antal måder at vælge 10 forskellige tal fra M med sum større end 10040 mindst lige så stor som antal måder at vælge 10 forskellige tal fra M med sum mindre end 10030.

Når summen er større end 10040, er den også større end 10039. Desuden har tallene 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009 summen 10040. Dermed er det ønskede vist.

Opgave 5. De sædvanlige betegnelser a, b og c benyttes. $\triangle ABD$ og $\triangle ADE$ er ensvinklede med forstørrelsesfaktor $\frac{|AD|}{|AB|} = \sin B$. Dermed er $|AE| = |AD| \sin B = b \sin C \sin B$. Tilsvarende fås $|AF| = c \sin C \sin B$. Da $\triangle ABC$ og $\triangle AFE$ har vinkel A fælles, og $\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \sin B \sin C$, er trekanterne ensvinklede med forstørrelsesfaktor $\sin B \sin C$.

Da $\triangle ABC$ og $\triangle AFE$ er ensvinklede med forstørrelsesfaktor $\sin B \sin C$, er $|EF| = a \sin B \sin C = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin A \sin B \sin C$. Dette udtryk er på grund af sinusrelationerne symmetrisk i trekantens vinkler, og derfor afhænger linjestykkets længde ikke af hvilket hjørne der er taget som udgangspunkt.