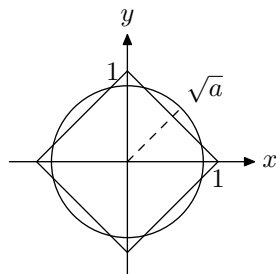


## Løsningsskitser

**Opgave 1.** Sidelængden i den kvadratiske grundflade kaldes  $x$ . Hypotenusen i en trekant med kateterne  $x$  og 5 danner fælles kant i pyramiden med en katete i en trekant hvor den anden katete er  $x$  og hypotenusen er 7 (der er to trekanter med hypotenusen 7). Ifølge Pythagoras gælder så  $x^2 + 5^2 = 7^2 - x^2$ . Dermed er grundfladens areal  $x^2 = 12$ .

**Opgave 2.** Opgaven løses grafisk:



Ligningerne  $|x| + |y| = 1$  og  $x^2 + y^2 = a$  beskriver hhv. et kvadrat og en cirkel med centrum i  $(0, 0)$  og radius  $\sqrt{a}$  (se figuren). For  $a = \frac{1}{2}$  vil cirklen tangere kvadratet indvendigt, og for  $a = 1$  vil cirklen røre kvadratet på koordinataksene. Herefter fås at for  $a \in ]\frac{1}{2}, 1[$  er der 8 løsninger (hver side i kvadratet skæres 2 steder af cirklen), for  $a = 1$  og for  $a = \frac{1}{2}$  er der 4 løsninger, og for øvrige værdier af  $a$  har ligningssystemet ingen løsninger.

**Opgave 3.** Lad  $Q$  være midtpunktet af linjestykket  $BC$ .  $\angle NBP = 45^\circ + \angle ABP = \angle ABQ$ . Af de ligebenede og retvinklede trekanter  $\triangle NBA$  og  $\triangle PBQ$  fås  $\frac{|BN|}{|AB|} = \frac{|BP|}{|BQ|} = \sqrt{2}$ . Dermed er  $\triangle NBP \sim \triangle ABQ$ , og forstørrelsesfaktoren er  $\sqrt{2}$ . Heraf slutes  $|NP| = \sqrt{2}|AQ|$  og  $\angle BPN = \angle BQA$ . På samme måde indses  $|MP| = \sqrt{2}|AQ|$  og  $\angle CPM = \angle CQA$ . Dermed er  $|NP| = |MP|$  og  $\angle NPM = 360^\circ - (\angle BPN + \angle CPM) - \angle BPC = 360^\circ - (\angle BQA + \angle CQA) - 90^\circ = 90^\circ$ .

**Opgave 4.** Først indses at 3 går op i alle tallene på tavlen. Lad de 14 tal være  $x_1, x_2, \dots, x_{14}$ , og lad  $s$  være deres sum. Så går 3 op i  $s - x_i$  for alle  $i$ , og dermed i  $\sum_{i=1}^{14} (s - x_i) = 14s - \sum_{i=1}^{14} x_i = 13s$ . Da primtallet 3 ikke går op i 13, må det gå op i  $s$ . Men da 3 også går op i  $s - x_i$ , går 3 op i  $x_i$ . Antag nu at mindst ét af tallene på tavlen er forskellig fra 0. Så findes der en højeste potens af 3 som går op i dem alle. Dividerer vi alle tallene med denne højeste potens af 3, får vi igen 14 tal med den egenskab at når ét af dem fjernes, kan de resterende deles i tre grupper med samme sum. Men mindst ét af tallene er ikke deleligt med 3. Modstrid! Altså må alle tallene på tavlen være 0.

**Opgave 5.** Da ligningssystemets venstresider er positive, er der ingen løsninger for  $p = 0$ .  $(x_1, x_2, \dots, x_{2005})$  er en løsning for  $p$  hvis og kun hvis  $(-x_1, -x_2, \dots, -x_{2005})$  er en løsning for  $-p$ . Det er derfor tilstrækkeligt at se på tilfældet hvor  $p$  er positiv. I det tilfælde må alle  $x_i$ 'er være positive.

$x_1 = x_2 = \dots = x_{2005} = x$  er en løsning til ligningssystemet hvis  $x$  er en løsning til  $x^4 + 1/x^2 = px$ , dvs. en løsning til „den skjulte andengradsligning“  $(x^3)^2 - px^3 + 1 = 0$ . Hvis der højst er én løsning, må diskriminanten ikke være positiv, hvilket giver  $p \leq 2$ .

Da  $x_i^4 + 1/x_i^2 = (x_i^2 - 1/x_i)^2 + 2x_i \geq 2x_i$  (\*), opfylder løsningerne  $2x_i \leq px_{i+1}$  for  $i = 1, 2, \dots, 2005$ , hvor  $x_{2006} = x_1$ . Heraf følger  $2^{2005} \leq p^{2005}$ , og dermed  $p \geq 2$ .

For at der er netop én løsning, må  $p = 2$ , og der må gælde lighedstegn ved (\*). Det kræver  $x_i^2 - 1/x_i = 0$ , dvs.  $x_i = 1$ . Eneste mulige og faktiske løsning for  $p = 2$  er  $x_1 = x_2 = \dots = x_{2005} = 1$ .

Konklusion: Der er netop én løsning for  $p = \pm 2$ .