

Løsningskitser.

Opgave 1. Lad $x = |DG|$. Da $\triangle EGD \sim \triangle BCD$, er $|EG| = 2x$, og dermed $|CD| = |CG| + |DG| = 4x + x = 5x$. Dermed bliver svaret $(\frac{|EG|}{|CD|})^2 = \frac{4}{25}$.

Opgave 2. $a^2 + b^2 + 9ab = (a - b)^2 + 11ab$. Heraf fås at 11 går op i $(a - b)^2$, og da 11 er et primtal, går det så op i $a - b$ og dermed i $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Opgave 3. Antag at de 4 3-summer alle er 13. Kald de 3 "hjørnecifre", som indgår i 2 3-summer, for a , b og c . En sammentælling giver $4 \cdot 13 = 1 + 2 + \dots + 9 + a + b + c \Leftrightarrow 52 = 45 + a + b + c \Leftrightarrow a + b + c = 7$. Dermed må tallene a , b og c bestå af tallene 1, 2 og 4. Da tallene 1 og 2 ikke kan indgå i samme 3-sum, må "hjørnecifferet" i det markerede felt være 4.

Opgave 4. Af den første ligning fås $x^3 + x = y^2 + z^2 \geq 0$. Den viser at $x \geq 0$, og hvis $x = 0$, så er $y = z = 0$. De to øvrige ligninger giver tilsvarende resultater for y og z . $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ses at være en løsning. For øvrige løsninger må gælde at $x > 0$, $y > 0$ og $z > 0$. Herefter viser $0 = 0 + 0 + 0 = (x^3 - y^2 - z^2 + x) + (y^3 - z^2 - x^2 + y) + (z^3 - x^2 - y^2 + z) = x(x - 1)^2 + y(y - 1)^2 + z(z - 1)^2$ at der for øvrige løsninger må gælde $x = y = z = 1$. Det ses at $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ faktisk er en løsning.

Opgave 5. Det kan let gøres for n lige. Man kan nemlig dække et 4×2 rektangel med 2 L-brikker, og skakbrættet kan så dækkes med disse rektangler når n er lige. Antag for et givet n at brættet er dækket af L-brikker. Der må være anvendt netop n^2 brikker (da hver brik dækker 4 felter) til overdækningen. Ved at vise at der må være anvendt et lige antal brikker, fås at n^2 er lige, og dermed er n lige.

Mal felterne i de lige rækker sorte og de øvrige felter hvide. Hver L-brik i overdækningen dækker enten 3 eller 1 sort felt.

Sæt

x = antallet af L-brikker som dækker 3 sorte og ét hvidt felt

y = antallet af L-brikker som dækker ét sort og 3 hvide felter

Så er $3x + y$ antallet af sorte felter, og $3y + x$ er antallet af hvide felter. Antallet af sorte og hvide felter er ens, dvs. $3x + y = 3y + x \Leftrightarrow x = y$, og dermed er n lige ($n^2 = 2x$).