

Løsningskitser.

Opgave 1. $24^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2h_c c = c^2 + 14c$. Denne andengradsligning i c har den positive løsning $c = 18$.

Opgave 2. Funktionen $f(x) = x^5 + \lfloor x \rfloor$ er voksende, $f(1) = 2$ og $f(2) = 34$. Derfor har ligningen $f(x) = 20$ højst én løsning, og den vil i givet fald ligge mellem 1 og 2 (dvs. $\lfloor x \rfloor = 1$). Dermed for $x \in]1; 2[$: $f(x) = 20 \Leftrightarrow x^5 + 1 = 20 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{19}$.

Opgave 3. $|2n^2 + 9n + 4| = |2(n + \frac{1}{2})(n + 4)| = |2n + 1||n + 4|$. Den ene af faktorerne må være 1. $|2n + 1| = 1 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = -1$ og $|n + 4| = 1 \Leftrightarrow n = -3 \vee n = -5$. De eneste mulige værdier for n som kan gøre $|2n^2 + 9n + 4|$ til et primtal, er så $-5, -3, -1$ og 0 . Ved indsættelse ses at udtrykket kun bliver et primtal for $n = -1$ og $n = -3$.

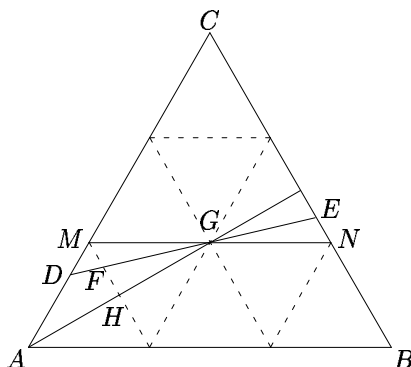
Opgave 4. *Moren peger på medianernes skæringspunkt G , og Georg skærer parallelt med en pizzaside.* Pizzaen bliver delt i et trapez og en trekant som er ligedannet med den oprindelige. Forholdet mellem sider i den afskårne trekant og den oprindelige er $\frac{2}{3}$, og dermed er arealforholdet $\frac{4}{9}$, altså moren får $\frac{4}{9}$ af pizzaen.

Moren peger på medianernes skæringspunkt G , og Georg skærer ikke parallelt med en pizzaside. Lad Georgs snit skære pizzaens sider i punkterne D og E . Vi navngiver pizzaens hjørner A, B og C så D ligger på AC , E ligger på BC og $\text{dist}(D, AB) < \text{dist}(E, AB)$. Linjen gennem G parallel med AB skærer AC i M og BC i N . Lad T være arealfunktionen, så ønskes vist at $T(\square AMNB) > T(\square ADEB) \geq \frac{1}{2}T(\triangle ABC)$. Lad linjen gennem M parallel med BC skære DE i F og medianen fra A i H . Da $\triangle GMF \cong \triangle GNE$, havest $T(\square AMNB) = T(\square ADEB) + T(\triangle MFD)$. Tilsvarende $T(\square AMNB) = \frac{1}{2}T(\triangle ABC) + T(\triangle MHA)$. Da yderligere $T(\triangle MFD) < T(\triangle MHA)$, følger $T(\square AMNB) > T(\square ADEB) \geq \frac{1}{2}T(\triangle ABC)$. Altså moren får mere end $\frac{4}{9}$ af pizzaen.

Moren peger på et punkt P forskelligt fra G . Vi kan navngive pizzaens hjørner A, B og C så P ligger inden i $\triangle CMN$, hvor M og N er defineret som før. Ved et snit gennem P parallelt med MN får moderen mindre end $\frac{4}{9}$ af pizzaen.

Sammenfattende: *Den største brøkdel af pizzaen som moren med sikkerhed kan få, er $\frac{4}{9}$, og den sikrer hun sig ved at pege på medianernes skæringspunkt.*

(Slutkommentar: Vi udnytter ikke at $\triangle ABC$ er ligesidet.)



Opgave 5. Summen af de 16 tal er 136, så summen af de 8 summer er 272. Dermed $272 \geq n + 2n + \dots + 8n = 36n$, som giver $n \leq \frac{272}{36} < 8$. Desuden går n op i $136 = 2^3 \cdot 17$. Dermed er de eneste muligheder for n værdierne 2 og 4. Et brugbart skema for 2 og 4 er:

1	3	5	7
2	4	6	8
9	11	13	15
16	14	12	10