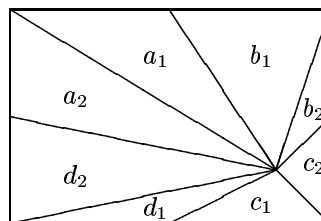


### Løsningsskitser.

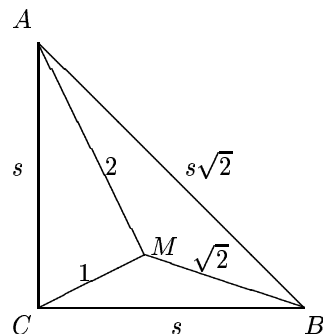
**Opgave 1.** Opdel områderne som vist. Så er  $a_1 = b_1$  (trekanter med samme højde og grundlinie),  $b_2 = c_2$ ,  $c_1 = d_1$  og  $d_2 = a_2$ . Da  $a+c = a_1+a_2+c_1+c_2$  og  $b+d = b_1+b_2+d_1+d_2$ , fås  $a+c = b+d$ .



**Opgave 2.** Antag, at kvadratet har sidelængde 1. For ethvert helt tal  $k > 1$  kan det deles i et kvadrat med sidelængde  $\frac{k-1}{k}$  omgivet på 2 af siderne af kvadrater med sidelængder  $\frac{1}{k}$ . Antallet af delkvadrater er så  $2k$ . Førstnævnte kvadrat kan yderligere deles i 4 lige store kvadrater, og så er antallet af delkvadrater  $2k+3$ . Da ethvert helt tal  $n$  større end 5 kan udtrykkes som  $2k$  eller  $2k+3$  for et helt tal  $k > 1$ , følger påstanden.

**Opgave 3.** Svaret er nej. Det bevises indirekte. Antag  $a+b = 2002$  og  $2002|ab$ . Da  $ab = a(2002-a) = 2002a - a^2$  og  $2002|ab$  følger, at  $2002|a^2$ . Da yderligere 2002 er kvadrattfri ( $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ), fås  $2002|a$ ; men det er i modstrid med  $0 < a < 2002$ .

**Opgave 4.** Da siderne i  $\triangle AMB$  er  $\sqrt{2}$  gange så store som siderne i  $\triangle BMC$ , er  $\triangle AMB \sim \triangle BMC$ . Heraf fås  $\angle BMC = \angle BMA = 180^\circ - (\angle MAB + \angle MBA) = 180^\circ - (\angle MBC + \angle MBA) = 135^\circ$ . Dermed  $\angle CMA = 360^\circ - 2 \cdot \angle BMC = 90^\circ$ .  $\triangle AMC$  er altså retvinklet, og Pythagoras giver så  $s = \sqrt{5}$  og dermed  $|AB| = \sqrt{10}$ .



**Opgave 5.**  $S$  kan presses ned på 29 for eksempel ved rækkefølgen  $1 - 17 - 9 - 3 - 15 - 7 - 5 - 13 - 11 - 4$  (cyklisk).  $S$  kan ikke blive mindre. Begrundelse: Betragt de 3 grupper med 3 sedler, som ligger på pladserne 1-3, 4-6 og 7-9 efter sedlen med tallet 1. Summen af tallene i de 3 grupper er 84, og dermed er gennemsnitssummen for de 3 grupper 28. I en af de 3 grupper er der 3 ulige tal, og dermed er summen af tallene i denne gruppe ikke 28. Dermed vil en af de 3 grupper have en sum, der er større end gennemsnittet 28.