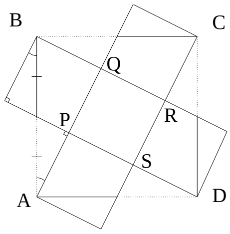
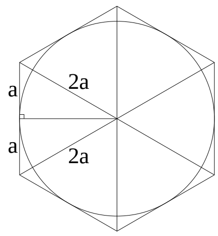
Georg Mohr Konkurrencen 2000

Kortfattet løsningsforslag

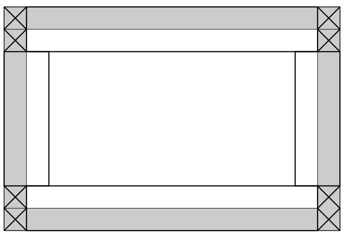


Opgave 1. Ved at flytte de fire små trekanter som vist på figuren fremkommer en figur med samme areal som kvadratet $ABCD$. Den nye figur består af 5 ens kvadrater. Følgelig har kvadratet $PQRS$ arealet $\frac{1}{5}$.



Opgave 2. Kald sidelængden i sekskanten $2a$. Så er (jf. figur og Pythagoras) kuglens radius $a\sqrt{3}$, glassets tværsnitsareal $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a$ og dets højde $3 \cdot 2 \cdot a\sqrt{3}$. Om rumfanget gælder så $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot 3 \cdot 2 \cdot a\sqrt{3} = 108$, hvoraf $a = 1$. Sidelængden er dermed 2 cm.

Opgave 3. Svaret er nej. Det bevises indirekte: Antag, at det kan lade sig gøre. Hvert bogstav har en „makker", nemlig det bogstav, der står på den modstående side af terningen. Hvert af bogstaverne G, O og R optræder to gange på forsiden. Altså optræder deres makkere hver to gange på bagsiden. Så må disse makkere være G, O og R. Men hvis f. eks. G og O er makkere, er der ingen makker til R. Modstrid.



Opgave 4. Hver rød flise parres så vidt muligt med en hvid naboflise. Herved bliver der 8 røde fliser tilovers (jf. figur). Altså må der også være 8 hvide fliser tilovers. Disse inderste fliser udgør et rektangel, som så må have dimensionerne 1×8 eller 2×4. Det samlede gulv består dermed af enten $(1+4) \times (8+4) = 60$ fliser eller $(2+4) \times (4+4) = 48$ fliser.

Opgave 5. Ved division med x^2 (klart, at $x \neq 0$) og brug af $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ omskrives ligningen til en andengradsligning i $x + \frac{1}{x}$, som løses:

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5 + 1 = 0 \iff x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\iff x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 5(x + \frac{1}{x}) - 6 = 0 \iff (x + \frac{1}{x})^2 + 5(x + \frac{1}{x}) - 6 = 0$$

$$\iff x + \frac{1}{x} = -6 \ \vee \ x + \frac{1}{x} = 1$$

$$\iff x^2 + 6x + 1 = 0 \ \vee \ x^2 - x + 1 = 0 \iff x = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

(idet ligningen $x^2 - x + 1 = 0$ ikke har nogen løsninger.) Samtlige mulige værdier for $x + \frac{1}{x}$ er altså tallet -6, og løsningerne til fjerdegradsligningen er tallene $-3 \pm 2\sqrt{2}$.