

Baltic Way 1997

København, d. 9. November 1997 klokken 10.00

$4\frac{1}{2}$ time. 5 point per opgave.

1. Bestem alle funktioner f fra de reelle tal ind i de reelle tal forskellig fra nulfunktionen, så

$$f(x)f(y) = f(x - y)$$

for alle reelle tal x og y .

2. Der er givet en følge $a_1, a_2, a_3, \dots$ af positive hele tal, i hvilken ethvert positivt helt tal forekommer præcis en gang. Vis, at der eksisterer hele tal ℓ og m , $1 < \ell < m$, så $a_1 + a_m = 2a_\ell$.

3. Lad $x_1 = 1$ og $x_{n+1} = x_n + \lfloor \frac{x_n}{n} \rfloor + 2$ for $n = 1, 2, 3, \dots$, hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største hele tal, der ikke er større end x . Bestem x_{1997} .

4. Vis, at det aritmetiske gennemsnit a af $x_1, \dots, x_n$ opfylder

$$(x_1 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2 \leq \frac{1}{2}(|x_1 - a| + \dots + |x_n - a|)^2.$$

5. I en følge $u_0, u_1, \dots$ af positive hele tal er u_0 vilkårligt, og for hvert ikke negativt helt tal n er

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_n & \text{for lige } u_n, \\ a + u_n & \text{for ulige } u_n, \end{cases}$$

hvor a er et fast ulige, positivt helt tal. Vis, at følgen er periodisk fra et vist trin.

6. Find alle tripler (a, b, c) af ikke negative hele tal, som opfylder $a \geq b \geq c$ og

$$1 \cdot a^3 + 9 \cdot b^2 + 9 \cdot c + 7 = 1997.$$

7. Lad P og Q være polynomier med heltallige koefficienter. Antag, at de hele tal a og $a + 1997$ er rødder i P , og at $Q(1998) = 2000$. Vis, at ligningen $Q(P(x)) = 1$ ikke har heltallige løsninger.

8. Hvis vi lægger 1996 til 1997, lægger vi først enerne 6 og 7 sammen. Vi får 13, skriver 3 og får 1 i mente. Når vi fortsætter, ser vi, at vi får tre menter i alt:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1 \\ 1\ 9\ 9\ 6 \\ +\ 1\ 9\ 9\ 7 \\ \hline 3\ 9\ 9\ 3 \end{array}$$

Eksisterer der et helt positivt tal k så vi ikke får nogen menter overhovedet, når vi lægger $1996 \cdot k$ til $1997 \cdot k$?

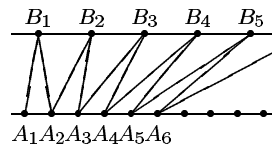
9. Verdenerne i Verdenssfæren er nummereret 1, 2, 3, ... og forbundet således, at troldmanden Gandalf for hvert helt tal $n \geq 1$ kan bevæge sig begge veje mellem to verdener med numrene n , $2n$ and $3n + 1$. Hvis han starter sin rejse i en vilkårlig verden, kan Gandalf da komme til en hvilken som helst anden verden?

10. Vis, at der blandt 79 på hinanden følgende hele positive tal skrevet i ti-talssystemet, findes et tal, hvor 13 går op i summen af cifrene.

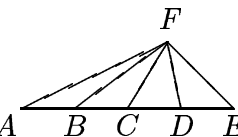
11. På to parallelle linier ligger forskellige punkter $A_1, A_2, A_3, \dots$ henholdsvis $B_1, B_2, B_3, \dots$ på en sådan måde, at $|A_i A_{i+1}| = 1$ og $|B_i B_{i+1}| = 2$ for $i = 1, 2, \dots$ (se figur). Givet, at $\angle A_1 A_2 B_1 = \alpha$, find den uendelige sum

$$\angle A_1 B_1 A_2 + \angle A_2 B_2 A_3 + \angle A_3 B_3 A_4 + \dots$$

12. To cirkler $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ skærer hinanden i P og Q . En linie gennem P skærer igen $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ i henholdsvis A og B , og X er midtpunktet af AB . Linien gennem Q og X skærer $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ igen i henholdsvis Y og Z . Vis at X er midtpunktet af YZ .



13. Fem forskellige punkter A, B, C, D og E ligger på en linie, så $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Punktet F ligger uden for linien. Lad G være centrum for trekant ADF 's omskrevne cirkel og H centrum for trekant BEF 's omskrevne cirkel. Vis, at linierne GH og FC er vinkelrette.



14. I trekant ABC er $|AC|^2$ det aritmetiske gennemsnit af $|BC|^2$ og $|AB|^2$. Vis, at $\cot^2 B \geq \cot A \cot C$. ($\cot v = \frac{\cos v}{\sin v}$)

15. I en spidsvinklet trekant ABC skærer vinkelhalveringslinierne for henholdsvis $\angle A, \angle B$ og $\angle C$ den omskrevne cirkel igen i henholdsvis A_1, B_1 og C_1 . Lad M være skæringspunktet mellem AB og $B_1 C_1$, og lad N være skæringspunktet mellem BC og $A_1 B_1$. Vis, at MN går gennem $\triangle ABC$'s indskrevne cirkels centrum.

16. På et 5×5 skakbræt spiller to spillere følgende spil: Den første spiller placerer en hest på et felt. Derefter flytter spillerne skiftevis hesten (efter de normale regler for skak), idet den anden spiller foretager første træk. Det er ikke tilladt at flytte hesten til et felt, der tidligere har været benyttet. Spilleren, som ikke kan trække, taber. For hvilken af de to spillere findes der en vindende strategi?

17. Et rektangel kan inddeles i n ens kvadrater. Det samme rektangel kan også inddeles i $n + 76$ ens kvadrater. Find n .

18. (i) Vis, at der findes to, ikke nødvendigvis disjunkte, uendelige mængder A og B af ikke negative hele tal, så hvert ikke negativt helt tal n entydigt kan skrives på formen $n = a + b$ med $a \in A, b \in B$.

(ii) Bevis, at for ethvert sådant par (A, B) , indeholder enten A eller B kun multipla af et helt tal $k > 1$.

19. I en skov bor n dyr ($n \geq 3$) i hver deres hule, og mellem hvert par af disse huler findes netop en sti, (der ikke passerer nogen anden hule). Før valget af skovens konge fører nogle af dyrene en valgkampagne. Hvert af de dyr, der fører valgkampagne, besøger hver af de andre huler netop en gang. De benytter kun stierne til at komme fra den ene hule til den anden, skifter aldrig fra en sti til en anden mellem hulerne og vender tilbage til deres egen hule ved slutningen af kampagnen. Endvidere oplyses, at ingen sti mellem to huler bliver benyttet af mere end et dyr, som fører kampagne.

a) Vis, at for hvert primtal n , er det størst mulige antal dyr, der fører kampagne, $\frac{n-1}{2}$.

b) Find det størst mulige antal dyr, der fører kampagne for $n = 9$.

20. Tolv kort ligger på en række. Der er tre forskellige slags kort, nemlig kort med begge sider hvide, begge sider sorte og med en hvid og en sort side. Til at begynde med har ni af de tolv kort en sort side opad. Kortene 1–6 vendes, og derefter har fire af de tolv kort en sort side opad. Nu vendes kortene 4–9, og så har seks kort en sort side opad. Til slut vendes kortene 1–3 og 10–12, og nu har fem af kortene en sort side opad. Hvor mange kort er der af hver slags?