Baltic Way 2017

Version: *Dansk*

Sorø, 11. november, 2017

Varighed: 4.5 timer.
Spørgsmål kan stilles den første halve time
Kun tegne- og skriveredskaber tilladt.

Opgave 1. Lad $a_0, a_1, a_2, \ldots$ være en uendelig følge af reelle tal der opfylder $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$ for alle positive heltal n. Vis at

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

gælder for alle postive heltal n.

Opgave 2. Findes der en endelig mængde af reelle tal sådan at deres sum er 2, summen af deres kvadrater er 3, summen af deres 3. potenser er 4, ... og summen af deres 9. potenser er 10?

Opgave 3. De positive heltal $x_1, \ldots, x_m$ (ikke nødvendigvis forskellige) er skrevet på en tavle. Det vides at hvert af tallene F_1, ..., F_{2018} kan skrives som en sum af et eller flere tal på tavlen. Hvad er den mindst mulige værdi af m?

(Her er $F_1, \ldots, F_{2018}$ de 2018 første Fibonaccital: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ for $k > 1$.)

Opgave 4. En *lineær form* i k variable er et udtryk på formen $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$ med reelle konstanter $a_1, \ldots, a_k$. Vis at der findes et positivt heltal n og lineære former $P_1, \ldots, P_n$ i 2017 variable således at ligheden

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}$$

gælder for alle reelle tal $x_1, \ldots, x_{2017}$.

Opgave 5. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ således at

$$f(x^2 y) = f(xy) + y f(f(x) + y)$$

er opfyldt for alle reelle tal x og y.

Opgave 6. Femten sten ligger på et 4×4 bræt, en i hvert felt, og med det sidste felt tomt. Hvis to sten ligger ved siden af hinanden (dvs. deres felter deler en side), må en af dem hoppe over den anden såfremt det felt den hopper til, er tomt. Den anden sten fjernes efterfølgende fra brættet.

X	Y	

$\longrightarrow$

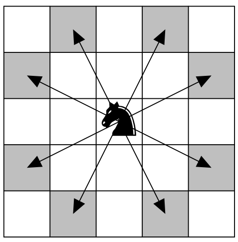
		X

For hvilke startpositioner af det tomme felt er det muligt at ende med netop én sten på brættet?

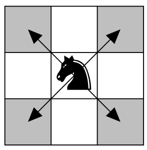
Opgave 7. Hver kant i en komplet graf med 30 knuder farves enten rød eller blå. For hver trekant der ikke er ensfarvet, må man ændre farven af de to kanter med samme farve, så trekanten bliver ensfarvet. Vis at man ved at bruge denne operation gentagne gange kan gøre hele grafen ensfarvet.

(En komplet graf er en graf hvor alle knuder er parvist forbundet med en kant.)

Opgave 8. En springer er halt så den skifter mellem at lave et normalt træk og et kort træk, hvor den flytter til et diagonalt nabofelt.



Normalt træk



Kort træk

Den haltende springer rykker på et 5×6-skakbræt startende med et normalt træk. Hvad er det største antal træk den kan lave hvis den selv kan vælge sin startposition og ikke må lande på det samme felt (inklusiv startfeltet) mere end en gang?

Opgave 9. Et positivt heltal n er *dansk* hvis en regulær sekskant kan inddeles i n kongruente polygoner. Vis at der findes uendeligt mange positive heltal n sådan at både n og $2^n + n$ er danske.

Opgave 10. Skaberen og Ødelæggeren bygger en mur. Skaberen har nogle grønne kubiske byggeklodser, og Ødelæggeren har nogle røde. De har alle samme størrelse. På jorden er en række med m kvadrater markeret med kridt som pladsholdere. Skaberen og Ødelæggeren skiftes til at placere en klods, enten ovenpå en pladsholder eller direkte ovenpå en klods, der allerede er der, sådan at højden af hver søjle ikke overstiger n. Skaberen lægger den første blok.

Skaberen vædder på at hun kan lave en grøn række, dvs. at alle m klodser i en fast højde er grønne. Ødelæggeren vædder på at han kan forhindre Skaberen i at opnå dette. Bestem alle par (m,n) af positive heltal hvor Skaberen kan sikre sig at hun vinder væddemålet.

Opgave 11. Lad H og I være henholdsvis højdernes skæringspunkt og centrum for den indskrevne cirkel i en spidsvinklet trekant ABC. Den omskrevne cirkel til trekant BCI skærer linjestykket AB i et punkt P forskellig fra B. Lad K være projektionen af H på AI og Q være spejlingen af P i K. Vis at B, H og Q ligger på linje.

Opgave 12. Linjen ℓ tangerer cirklen S_1 i punktet X og cirklen S_2 i punktet Y. Vi tegner en linje m parallel med ℓ der skærer S_1 i et punkt P og S_2 i et punkt Q. Vis at forholdet $|XP|/|YQ|$ er uafhængigt af valget af m.

Opgave 13. Lad ABC være en trekant med $\angle ABC = 60°$. Lad I og O være henholdsvis centrum for den ind- og omskrevne cirkel til trekant ABC. Lad M være midtpunktet af buestykket BC på den omskrevne cirkel til ABC, som ikke indeholder A. Bestem $\angle BAC$ givet at $|MB| = |OI|$.

Opgave 14. Lad P være et punkt i det indre af den spidse vinkel $\angle BAC$. Antag at $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Punkterne D og E ligger henholdsvis på linjestykkerne BA og CA således at $|BD| = |BP|$ og $|CP| = |CE|$. Punkterne F og G ligger henholdsvis på linjestykkerne AC og AB således at DF står vinkelret på AB, og EG står vinkelret på AC. Vis at $|PF| = |PG|$.

Opgave 15. Lad $n \geq 3$ være et heltal. Hvad er det størst mulige antal indre vinkler større end $180°$ i en n-kant i planen, så n-kanten ikke skærer sig selv, og alle sider har samme længde?

Opgave 16. Er det muligt for enhver gruppe af personer at vælge et positivt heltal N og tildele et positivt heltal til hver person i gruppen så produktet af to personers tal er deleligt med N hvis og kun hvis de er venner?

Opgave 17. Afgør hvorvidt ligningen

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

har uendeligt mange løsninger i de positive heltal.

Opgave 18. Lad $p > 3$ være et primtal, og lad $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ være en permutation af $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. For hvilke p er det altid muligt at bestemme følgen $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ hvis $a_i a_j$ modulo p kendes for ethvert $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ med $i \neq j$?

Opgave 19. For ethvert heltal $n \geq 1$ betegner $a(n)$ antallet af menter som opstår når 2017 og $n \cdot 2017$ lægges sammen. De første værdier er $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, hvilket kan ses fra det følgende:

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Vis at

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

Opgave 20. Lad S være mængden af ordnede par (a,b) af heltal med $0 < 2a < 2b < 2017$ sådan at $a^2 + b^2$ er deleligt med 2017. Vis at

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b.$$