Baltic Way

8. november 2014, Vilnius

Language: **Danish**

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Tilladte hjælpemidler: Tegne- og skriveredskaber.

Opgave 1. Vis at

$$\cos(56^\circ)\cdot\cos(2\cdot 56^\circ)\cdot\cos(2^2\cdot 56^\circ)\cdot\ldots\cdot\cos(2^{23}\cdot 56^\circ)=\frac{1}{2^{24}}.$$

Opgave 2. Lad $a_0, a_1, \ldots, a_N$ være reelle tal, som opfylder $a_0 = a_N = 0$ og

$$a_{i+1}-2a_i+a_{i-1}=a_i^2,$$

for $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Vis at $a_i \leqslant 0$ for $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Opgave 3. De positive reelle tal a, b, c opfylder $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Vis uligheden

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Opgave 4. Bestem alle funktioner $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ så

$$f(f(y))+f(x-y)=f(xf(y)-x),$$

for alle reelle tal x, y.

Opgave 5. Givet positive reelle tal a, b, c, d, som opfylder

$$a^2+d^2-ad=b^2+c^2+bc \qquad \text{og} \qquad a^2+b^2=c^2+d^2,$$

bestem alle mulige værdier af $\frac{ab+cd}{ad+bc}$.

Opgave 6. På hvor mange måder kan man farvelægge en række af 16 stole, så hver stol bliver enten rød eller grøn, og længden af hver ensfarvet sekvens af stole er ulige?

Opgave 7. Hvor mange permutationer $p_1, p_2, \ldots, p_{30}$ af tallene 1, 2, ..., 30 opfylder $\sum_{k=1}^{30}|p_k-k|=450$?

Opgave 8. Albert og Betty spiller følgende spil. Der er en rød skål med 100 blå bolde og en blå skål med 100 røde bolde. I hver tur udfører hver spiller et af følgende træk:

a) Tag to røde bolde fra den blå skål og læg dem i den røde skål.

b) Tag to blå bolde fra den røde skål og læg dem i den blå skål.

c) Tag to bolde med forskellige farver fra samme skål og smid dem væk.

De skiftes til at trække og Albert starter. Spilleren, der tager den sidste blå bold i den røde skål eller den sidste røde bold i den blå skål, vinder. Afgør hvem der har en vindende strategi.

Opgave 9. Hvad er det mindst mulige antal felter, der kan markeres på et $n \times n$ skakbræt, så begge diagonaler i ethvert delkvadrat med sidelængde $m > \frac{n}{2}$ indeholder mindst ét markeret felt?

Opgave 10. I et land er der 100 lufthavne. Super-Air har direkte fly mellem nogle par af lufthavne (i begge retninger). En lufthavns *trafik* er antallet af lufthavne, som den har direkte Super-Air-flyforbindelser til. Et andet selskab Concur-Air har direkte flyforbindelser mellem to lufthavne, hvis og kun hvis summen af de to lufthavnes trafik er mindst 100. Det viser sig, at der findes en rundtur af Concur-Air-flyruter, som lander i hver lufthavn netop én gang. Vis at der også er en rundtur med Super-Air-flyruter, som lander i hver lufthavn netop én gang.

Opgave 11. Lad Γ være den omskrevne cirkel til den spidsvinklede trekant ABC. Linjen gennem C vinkelret på AB skærer AB i D og Γ igen i E. Vinkelhalveringslinjen til vinkel C skærer AB i F og Γ igen i G. Linjen GD skærer Γ igen i H og linjen HF skærer Γ igen i I. Vis at $AI = EB$.

Opgave 12. Trekant ABC er givet. Lad M være midtpunktet af linjestykket AB og T være midtpunktet af den cirkelbue BC af den omskrevne cirkel til trekant ABC, som ikke indeholder A. Punktet K i det indre af trekant ABC opfylder, at $MATK$ er et ligebenet trapez, hvori $AT \parallel MK$. Vis at $AK = KC$.

Opgave 13. Lad $ABCD$ være et kvadrat indskrevet i en cirkel ω, og lad P være et punkt på den korte cirkelbue AB af ω. Lad R være skæringspunktet mellem CP og BD, og lad S være skæringspunktet mellem DP og AC. Vis at trekanterne ARB og DSR har lige store arealer.

Opgave 14. Lad $ABCD$ være en konveks firkant, så linjen BD halverer vinkel ABC. Den omskrevne cirkel til trekant ABC skærer siderne AD og CD i henholdsvis P og Q. Linjen gennem D parallel med AC skærer linjerne BC og BA i henholdsvis R og S. Vis at punkterne P, Q, R og S ligger på en cirkel.

Opgave 15. Summen af vinklerne ved A og C i en konveks firkant $ABCD$ er mindre end $180°$. Vis at

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC < AC(AB + AD).$$

Opgave 16. Afgør om $712! + 1$ er et primtal.

Opgave 17. Findes der parvis forskellige rationale tal x, y, z så

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = 2014?$$

Opgave 18. Lad p være et primtal, og lad n være et positivt heltal. Bestem antallet af firtupler (a_1, a_2, a_3, a_4), hvor $a_i \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ for $i = 1, 2, 3, 4$, så

$$p^n \mid (a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1).$$

Opgave 19. Lad m og n være indbyrdes primiske positive heltal. Bestem alle mulige værdier af

$$\gcd(2^m - 2^n, 2^{m^2+mn+n^2} - 1).$$

Opgave 20. Betragt en følge af positive heltal $a_1, a_2, a_3, \ldots$, som for $k \geqslant 2$ opfylder

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2015^i},$$

hvor 2015^i er den maksimale potens af 2015, som går op i $a_k + a_{k-1}$. Vis at hvis følgen er periodisk, da går 3 op i dens periode.