Opgaver

10. november 2012, Tartu, Estland

–Danish version–

Varighed: 4 timer og 30 minutter.
Det er tilladt at stille spørgsmål de første 30 minutter.
Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1. Tallene fra 1 til 360 er inddelt i 9 delmængder bestående af på hinanden følgende heltal, og summerne af tallene i hver delmængde placeres derefter i felterne i et 3×3 kvadrat. Er det muligt at dette kvadrat er et magisk kvadrat?

Bemærkning: Et magisk kvadrat er et kvadrat hvor summen af tallene i hver række, hver søjle og hver af de to diagonaler er den samme.

Opgave 2. Lad a, b, c være reelle tal. Vis at

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \le 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Opgave 3. a) Vis at ligningen

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største heltal mindre end eller lig med x, har præcis en reel løsning i hvert interval mellem to på hinanden følgende positive heltal.

b) Vis at ingen af de positive reelle løsninger til denne ligning er rationelle.

Opgave 4. Vis at for uendeligt mange par (a, b) af hele tal har ligningen

$$x^{2012} = ax + b$$

to forskellige reelle tal, hvis produkt er 1, blandt sine løsninger.

Opgave 5. Bestem alle funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 6. Der er 2012 lamper på et bord. To personer spiller følgende spil. I hvert træk trykker en spiller på kontakten til en lampe, men han må aldrig genskabe en tidligere konfiguration af tændte lamper. Den spiller som først ikke kan trække, taber. Hvilken spiller har en vindende strategi?

Opgave 7. På et 2012×2012 bræt er nogle af felterne på diagonalen fra øverste højre hjørne til nederste venstre hjørne markerede. Ingen af de markerede felter er hjørnefelter. I hvert felt står der et heltal. Alle tallene i felterne langs den øverste kant og den venstre kant er 1. Alle tallene i de markerede felter er 0. Tallet i hvert af de andre felter er summen af tallet ovenfor og tallet til venstre for feltet. Vis at tallet i nederste højre hjørne ikke er deleligt med 2011.

Opgave 8. En orienteret graf indeholder ingen orienterede kredse, og der findes ingen orienterede stier med flere end 99 kanter. Vis at det er muligt at farve grafens kanter i to farver så der ikke findes nogen ensfarvede orienterede stier med flere end 9 kanter.

Opgaver

10. november 2012, Tartu, Estland

–Danish version–

Opgave 9. I hvert felt på et 5×5 bræt står der 0. Det er tilladt at vælge et tilfældigt felt og lægge 1 til både tallet i feltet og tallene i alle de felter der har en side til fælles med feltet. Er det muligt at opnå at der står 2012 på samtlige felter?

Opgave 10. To spillere A og B spiller følgende spil. Før spillet starter vælger A 1000 ikke nødvendigvis forskellige ulige primtal, og B vælger derefter halvdelen og skriver dem på en tavle. I hvert træk vælger en spiller et positivt heltal n, sletter nogle primtal p_1, p_2, …, p_n på tavlen og skriver alle primfaktorerne i $p_1 p_2 \dots p_n - 2$ i stedet (hvis et primtal optræder flere gange i primfaktoropløsningen, skrives det det antal gange det optræder). Spiller A starter, og den spiller som efterlader tavlen tom, taber spillet. Vis at en af de to spillere har en vindende strategi, og bestem hvem.

Bemærkning: Da 1 ikke har nogen primfaktorer, er det tilladt at slette et enkelt 3-tal.

Opgave 11. Lad ABC være en trekant med $\angle A = 60^\circ$. Punktet T ligger inden i trekanten så $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Lad M være midtpuntet af BC. Vis at $|TA| + |TB| + |TC| = 2|AM|$.

Opgave 12. Lad P_0, P_1, …, $P_8 = P_0$ være punkter på en cirkel i denne rækkefølge, og lad Q være et punkt i ottekanten $P_0 P_1 \dots P_7$ så $\angle P_{i-1} Q P_i = 45^\circ$ for $i = 1, \dots, 8$. Vis at summen

$$\sum_{i=1}^{8} |P_{i-1} P_i|^2$$

er minimal hvis og kun hvis Q er cirklens centrum.

Opgave 13. Lad ABC være en spidsvinklet trekant, og lad H være højdernes skæringspunkt. Lad punkterne H_A, H_B og H_C være den omskrevne cirkels andet skæringspunkt med højden fra henholdsvis A, B og C. Vis at arealet af $\triangle H_A H_B H_C$ ikke er større end arealet af $\triangle ABC$.

Opgave 14. I trekant ABC rører den indskrevne cirkel siderne BC, CA, AB i henholdsvis D, E, F. Lad G være midtpunktet af linjestykket DE. Vis at $\angle EFC = \angle GFD$.

Opgave 15. Centrum O for den omskrevne cirkel til den indskrivelige firkant $ABCD$ ligger inden i firkanten, men ikke på diagonalen AC. Firkantens diagonaler skærer hinanden i punktet I. Den omskrevne cirkel til trekant AOI skærer siden AD i punktet P og siden AB i punktet Q. Den omskrevne cirkel til trekant COI skærer siden CB i punktet R og siden CD i punktet S. Vis at $PQRS$ er et parallelogram.

Opgave 16. Lad n, m og k være postive heltal så $(n-1)n(n+1) = m^k$. Vis at $k = 1$.

Opgave 17. Lad $d(n)$ betegne antallet af positive divisorer i n. Find alle tripler (n, k, p), hvor n og k er positive heltal, og p er et primtal, så

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Opgave 18. Find alle heltalstripler (a, b, c) så $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Opgave 19. Vis at $n^n + (n+1)^{n+1}$ er et sammensat tal for uendeligt mange positive heltal n.

Opgave 20. Find alle heltalsløsninger til ligningen $2x^6 + y^7 = 11$.