Dansk

BALTIC WAY 2010

REYKJAVIK, 6. NOVEMBER 2010

Varighed: $4\frac{1}{2}$ time.
Det er tilladt at stille spørgsmål de første 30 minutter.
Tilladte hjælpemidler: passer og lineal.
Hver opgave er 5 point værd.

Opgave 1. Bestem alle kvadrupler af reelle tal (a, b, c, d) som opfylder ligningssystemet

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2010} = 3a \\ (a+c+d)^{2010} = 3b \\ (a+b+d)^{2010} = 3c \\ (a+b+c)^{2010} = 3d. \end{cases}$$

Opgave 2. Lad x være et reelt tal så $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Vis at

$$\cos^2(x)\cot(x) + \sin^2(x)\tan(x) \geq 1.$$

Opgave 3. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ være reelle tal større end 1. Antag at $|x_i - x_{i+1}| < 1$ for $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Vis at

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

Opgave 4. Bestem alle polynomier $P(x)$ med reelle koefficienter så

$$(x - 2010)P(x + 67) = xP(x)$$

for alle hele tal x.

Opgave 5. Lad $\mathbb{R}$ være mængden af reelle tal. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 6. Et $n \times n$ skakbræt er farvelagt med n farver så hoveddiagonalen (fra øverste venstre til nederste højre hjørne) er farvet med den første farve, de to nabodiagonaler er farvet med den anden farve, de to næste diagonaler (en ovenover og en nedenunder) er farvet med den tredje farve, osv. så de to hjørner (det øverste højre og det nederste venstre) er farvet med farve n. Det viser sig at man kan sætte n skaktårne på brættet så de ikke truer hinanden, og så der ikke findes to tårne som står på felter af samme farve. Vis at $n \equiv 0 \pmod 4$ eller $n \equiv 1 \pmod 4$.

Opgave 7. I et land er der nogle byer hvoraf den ene er hovedstaden. For to vilkårlige byer A og B er der én direkte flyrute fra A til B og én direkte flyrute fra B til A, og de koster det samme. Antag at alle rundture hvor man lander netop én gang i hver by, koster det samme. Vis at alle rundture hvor man lander i alle byer, på nær hovedstaden, netop en gang, koster det samme.

Opgave 8. I en klub med 30 medlemmer har hvert medlem til at begynde med en hat. En dag giver hvert medlem sin hat til et andet medlem (et medlem kan godt modtage flere hatte). Vis at der findes en gruppe på 10 medlemmer, så ingen af disse har modtaget en hat fra en anden i denne gruppe.

Opgave 9. Der er en bunke med 1000 tændstikker. To spillere skiftes til at trække og kan i hvert træk fjerne mellem 1 og 5 tændstikker. Det er også tilladt højst 10 gange i hele spillet at fjerne 6 tændstikker. Hvis fx den første spiller har benyttet dette træk 7 gange, og den anden 3, kan trækket ikke benyttes mere. Den spiller som tager den sidste tændstik, vinder. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi?

Opgave 10. Lad n være et heltal med $n \geq 3$. Betragt alle mulige opdelinger af en konveks n-kant i trekanter vha. $n-3$ diagonaler, som ikke skærer hinanden, og alle farvelægninger af trekanterne med sort og hvid, så trekanter der deler en side, ikke har samme farve. Bestem det mindst mulige antal sorte trekanter.

Opgave 11. Lad $ABCD$ være et kvadrat, og lad S være skæringspunktet mellem diagonalerne AC og BD. Cirklen k går gennem A og C, og cirklen k' går gennem B og D. Desuden skærer k og k' hinanden i netop to punkter P og Q. Vis at S ligger på PQ.

Opgave 12. Lad $ABCD$ være en konveks firkant med præcis et par af parallelle sider.

a) Vis at $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ (i denne rækkefølge) ikke kan udgøre en aritmetisk progression.

b) Vis at der findes en sådan firkant for hvilken $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ i en anden rækkefølge udgør en aritmetisk progression.

Opgave 13. I en spidsvinklet trekant ABC er D fodpunktet for højden fra C, og H er højdernes skæringspunkt. Centrum for trekantens omskrevne cirkel ligger på vinkelhalveringslinjen til vinkel DHB. Bestem alle mulige værdier af $\angle CAB$.

Opgave 14. Antag at trekant ABC er spidsvinklet, og lad D og E være punkter på henholdsvis siden AC og siden BC, så A, B, D og E ligger på en cirkel. Antag desuden at cirklen gennem D, E og C skærer siden AB i to punkter X og Y. Vis at midtpunktet af linjestykket XY er fodpunktet for højden fra C på AB.

Opgave 15. I trekant ABC skærer vinkelhalveringslinjen fra A siden BC i punktet L. Punkterne M og N vælges på linjestykket AL så $\angle ABM = \angle ACN = 23^\circ$, og punktet X er et indre punkt i trekanten, så $|BX| = |CX|$ og $\angle BXC = 2\angle BML$. Bestem $\angle MXN$.

Opgave 16. For et positivt helt tal k betegner $d(k)$ antallet af divisorer i k (fx er $d(12) = 6$), og $s(k)$ betegner summen af cifrene i k (fx er $s(12) = 3$). Et positivt helt tal n kaldes *fornøjeligt* hvis der findes et positivt helt tal k, så $d(k) = s(k) = n$. Hvad er det mindste fornøjelige ulige tal større end 1?

Opgave 17. Bestem alle positive hele tal n så decimalrepræsentationen af n^2 kun består af ulige cifre.

Opgave 18. Lad p være et primtal. For alle k, $1 \leq k \leq p-1$, er der et unikt heltal betegnet k^{-1} så $1 \leq k^{-1} \leq p-1$ og $k^{-1} \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$. Vis at følgen

$$1^{-1}, \quad 1^{-1}+2^{-1}, \quad 1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}, \quad \ldots, \quad 1^{-1}+2^{-1}+\cdots+(p-1)^{-1}$$

(addition modulo p) højst indeholder $(p+1)/2$ forskellige elementer.

Opgave 19. For hvilke k findes der k forskellige primtal $p_1, p_2, \ldots, p_k$ så

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2 = 2010?$$

Opgave 20. Bestem alle positive hele tal n for hvilke der findes en uendelig delmængde A af mængden $\mathbb{N}$ af positive hele tal, så der for alle valg af forskellige $a_1, \ldots, a_n \in A$ gælder at tallene $a_1 + \cdots + a_n$ og $a_1 \cdots a_n$ er indbyrdes primiske.