Dansk

Baltic Way 2009

Trondheim, 7. november 2009

Varighed: $4\frac{1}{2}$ time.
Spørgmål kan stilles i løbet af de første 30 minutter.

Opgave 1. Et polynomium $p(x)$ af grad $n \geq 2$ har netop n reelle rødder, talt med multiplicitet. Vi ved at koefficienten til x^n er 1, alle rødderne er mindre end eller lig med 1, og $p(2) = 3^n$. Hvilke værdier kan $p(1)$ antage?

Opgave 2. Lad a_1, a_2, …, a_{100} være ikke-negative heltal som opfylder uligheden

$$a_1(a_1-1)\cdots(a_1-20) + a_2(a_2-1)\cdots(a_2-20) + \cdots + a_{100}(a_{100}-1)\cdots(a_{100}-20) \leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 79.$$

Vis at $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} \leq 9900$.

Opgave 3. Lad n være et givet positivt heltal. Vis at man kan vælge tal $c_k \in \{-1, 1\}$ $(1 \leq k \leq n)$ sådan at

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leq 4.$$

Opgave 4. Bestem alle heltal $n > 1$ for hvilke uligheden

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})x_n$$

gælder for alle reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Opgave 5. Lad $f_0 = f_1 = 1$ og $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ $(i \geq 0)$. Find alle reelle løsninger til ligningen

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}\,.$$

Opgave 6. Lad a og b være heltal således at ligningen $x^3 - ax^2 - b = 0$ har tre heltallige rødder. Vis at $b = dk^2$ hvor d og k er heltal, og d går op i a.

Opgave 7. Antag at følgende gælder for et primtal p og heltal a, b, c:

$$6 \mid p+1, \quad p \mid a+b+c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Vis at $p \mid a, b, c$.

Opgave 8. Bestem alle positive heltal n for hvilke der findes en opdeling af mængden

$$\{n, n+1, n+2, \ldots, n+8\}$$

i to disjunkte delmængder sådan at produktet af alle elementerne i den ene delmængde er lig med produktet af alle elementerne i den anden delmængde.

Opgave 9. Bestem alle positive heltal n for hvilke $2^{n+1} - n^2$ er et primtal.

Opgave 10. Lad $d(k)$ betegne antallet af positive divisorer i et positivt heltal k. Vis at der findes uendeligt mange positive heltal M der ikke kan skrives som

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$

for noget positivt heltal n.

Opgave 11. Lad M være midtpunktet af siden AC i en trekant ABC, og lad K være et punkt på linjen AB således at A ligger mellem B og K. Linjen KM skærer siden BC i punktet L. Punktet P ligger på linjestykket BM sådan at PM er vinkelhalveringslinje til vinkel LPK. Linjen ℓ går gennem A og er parallel med BM. Vis at projektionen af punktet M på linjen ℓ tilhører linjen PK.

Opgave 12. I en firkant $ABCD$ er $AB \parallel CD$ og $|AB| = 2\,|CD|$. En linje ℓ står vinkelret på CD og går gennem punktet C. Cirklen med centrum D og radius DA skærer linjen ℓ i punkterne P og Q. Vis at $AP \perp BQ$.

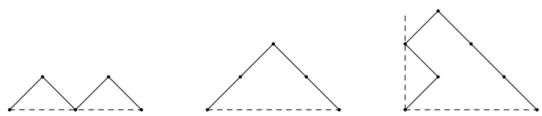
Opgave 13. Linjestykkerne AD, BE og CF er højder i trekant ABC, og H er deres skæringspunkt. Punkterne I_1, I_2 og I_3 er centre i de indskrevne cirkler til hhv. trekant EHF, FHD og DHE. Vis at linjerne AI_1, BI_2 og CI_3 går gennem samme punkt.

Opgave 14. For hvilke $n \geq 2$ er det muligt at finde n parvist ikke-ensvinklede trekanter $A_1, A_2, \ldots, A_n$ således at de hver især kan inddeles i n parvist ikke-ensvinklede trekanter der hver især er ensvinklede med en af trekanterne $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

Opgave 15. Et enhedskvadrat er inddelt i m firkanter $Q_1, \ldots, Q_m$. Lad S_i være summen af kvadraterne på de fire sider i firkant Q_i, for hvert $i = 1, \ldots, m$. Vis at

$$S_1 + \ldots + S_m \geq 4.$$

Opgave 16. En *n-trønder-vandring* er en vandring i første kvadrant som begynder i $(0, 0)$ og ender i $(2n, 0)$ uden at krydse sig selv, og hvor hvert skridt er en af vektorerne $(1, 1)$, $(1, -1)$ og $(-1, 1)$. (Figuren viser de mulige 2-trønder-vandringer.) Bestem antallet af n-trønder-vandringer.



Opgave 17. Bestem det største heltal n for hvilket der findes n forskellige heltal sådan at ingen af disse tal er delelige med 7, 11 eller 13, mens summen af vilkårlige to af tallene er delelig med mindst et tallene 7, 11 og 13.

Opgave 18. Lad $n > 2$ være et heltal. I et land er der n byer, og hvert par af byer er direkte forbundet med en vej. Hver vej er tildelt et tal fra mængden $\{1, 2, \ldots, m\}$ (forskellige veje kan tildeles samme tal). En bys (hemmelige) *kode* er summen af tallene tildelt vejene der udgår fra byen. Find det mindste m for hvilket det er muligt at alle byer har forskellige koder.

Opgave 19. Til en komsammen med otte personer gælder at hvert par af personer enten kender hinanden eller ikke kender hinanden. Hver person kender præcis tre andre gæster. Undersøg hvorvidt følgende to betingelser kan være opfyldt samtidig:

- Blandt vilkårlige tre personer kender mindst to ikke hinanden.
- Blandt vilkårlige fire personer kender mindst to hinanden.

Opgave 20. I den fremtidige by "Baltic Way" ligger 16 hospitaler. Hver nat skal præcist fire af dem have deres skadestue åben. Er det muligt at lægge vagtplanen på en måde så hvert par af hospitaler efter 20 nætter har haft deres skadestue åben samtidig netop én nat.