Dansk version

Baltic Way 2003 matematisk contest

Riga, 2. November 2003

Varighed: 4,5 timer.

Spørgsmål til opgaverne kan stilles inden for de første 30 minutter.

1. Lad $\mathbb{Q}_+$ være mængden af positive rationale tal.
   Bestem alle funktioner $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, der for alle $x \in \mathbb{Q}_+$ opfylder
   $(1) : f(\frac{1}{x}) = f(x)$
   $(2) : (1 + \frac{1}{x})f(x) = f(x+1)$

2. Vis, at enhver løsning til
   $$x^3 + px + q = 0$$
   opfylder uligheden $4qx \leq p^2$.

3. Lad x, y og z være positive reelle tal så $xyz = 1$. Vis, at
   $$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right).$$

4. Lad a, b, c være positive reelle tal. Vis, at
   $$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

5. En talfølge (a_n) er defineret på følgende måde: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$, og $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$ for $n \geq 2$. Vis, at for alle $n \geq 1$ gælder
   $$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1 a_2 \dots a_n.$$

6. Lad $n \geq 2$ og $d \geq 1$ være hele tal så $d \mid n$, og lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ være reelle tal så $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Vis at der mindst er $\binom{n-1}{d-1}$ valg af d indices $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n$ så $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_d} \geq 0$.

7. Lad X være en delmængde af $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$ med følgende egenskab: Hvis a, $b \in X$, $a \neq b$, så $a \cdot b \notin X$. Hvad er det største antal elementer i X?

8. Der er 2003 stykker slik på et bord. To spillere skiftes til at trække. Et træk består i at spise et stykke slik eller halvdelen af slikstykkerne (den "mindste halvdel", hvis der er et ulige antal slikstykker). Mindst et stykke slik skal spises ved hvert træk. Taberen er den der spiser det sidste stykke slik. Hvilken spiller - den første eller den anden - har en vindende strategi.

9. Det er kendt at n er et positivt helt tal mindre end eller lig 144. Ti spørgsmål af typen "Er n mindre end a?" er tilladte. Svarene bliver givet med en forsinkelse: Svaret på det i'te spørgsmål bliver først givet efter at det $(i+1)$'te spørgsmål er stillet, $i = 1, 2, \dots, 9$. Svaret på det 10'ende spørgsmål bliver givet umiddelbart efter at spørgsmålet er stillet. Find en strategi til at bestemme n.

10. Et *gitterpunkt* i planen er et punkt hvis koordinater begge er hele tal. *Centroiden* af fire punkter (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, er punktet $(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4})$. Lad n være det største naturlige tal med følgende egenskab: Der er n forskellige gitterpunkter i planen sådan at centroiden af fire vilkårligt valgte af dem ikke er et gitterpunkt. Vis, at $n = 12$.

11. Er det muligt at vælge 1000 punkter i planen sådan at når afstandene mellem punkterne betragtes, er mindst 6000 ens?

12. Lad $ABCD$ være et kvadrat. Lad M være et indre punkt på siden BC, N et indre punkt på siden CD og $\angle MAN = 45°$. Vis, at centrum for den omskrevne cirkel til trekant AMN ligger på AC.

13. Lad $ABCD$ være et rektangel med $BC = 2 \cdot AB$. Lad E være midpunktet af BC og P et vilkårligt indre punkt på AD. Lad F og G være henholdsvis A's vinkelrette projektion på BP og D's vinkelrette projektion på CP. Vis, at punkterne E, F, P, G ligger på samme cirkel.

14. Lad ABC være en vilkårlig trekant og AMB, BNC og CKA være ligesidede trekanter udadvendt på trekant ABC. En normal til AC gennem MN's midtpunkt konstrueres. Ligeledes konstrueres normaler til AB og BC gennem henholdsvis NK og KM's midtpunkter. Vis, at de 3 normaler går gennem samme punkt.

15. Lad P være skæringspunktet mellem diagonalen AC and BD i en inskrivelig firkant. En cirkel gennem P tangerer siden CD i dets midtpunkt M og skærer linjestykkerne BD og AC i henholdsvis punkterne Q og R. Lad S være et punkt på linjestykket BD så $BS = DQ$. Linjen gennem S parallel med AB skærer AC i T. Vis, at $AT = RC$.

16. Bestem alle positive hele talpar (a, b) så $a - b$ er et primtal og ab er et kvadrattal.

17. Alle de positive divisorer af et positiv helt tal n er gemt i et array i voksende rækkefølge. Mary skal skrive et program som afgør om en vilkårligt valgt divisor $d > 1$ i arrayet er et primtal. Lad n have k divisorer, som ikke er større end d. Mary påstår at det er nok at kontrollere om en af de første $\lceil k/2 \rceil$ divisorer i n går op i d: Hvis en divisor i d, større end 1, er fundet blandt dem, er d sammensat, ellers er d et primtal. Har Mary ret?

    ($\lceil x \rceil$ = det mindste hele tal større end eller lig med x)

18. Ethvert helt tal er farvet med præcis en af farverne BLÅ, GRØN, RØD, GUL. Kan dette gøres på en sådan måde at hvis a, b, c og d ikke alle er 0 og har samme farve, så er $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

19. Lad a og b være positive hele tal. Vis, at hvis $a^3 + b^3$ er et kvadrattal, så er $a + b$ ikke et produkt af to forskellige primtal.

20. Lad n være et positivt helt tal så summen af dets divisorer (undtagen n) plus antallet af disse divisorer er lig n. Vis, at $n = 2m^2$ for et helt tal m.