Baltic Way 2002 mathematical team contest

Danish version

Tartu, November 2, 2002

Varighed: 4.5 time.
Spørgsmål til opgavesættet besvares indenfor de første 30 minutter.

1. Løs ligningssystemet
$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1 \end{cases}$$
indenfor de reelle tal.

2. Lad a, b, c, d være reelle tal så
$$a + b + c + d = -2\,,$$
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0\,.$$
Vis at mindst et af tallene a, b, c og d er mindre end eller lig -1.

3. Find alle talfølger $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots$ af reelle tal, så
$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$$
for alle hele tal $m, n \geqslant 0$.

4. Lad n være et positivt helt tal. Vis, at
$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i)^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$
for alle ikke-negative reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$, som opfylder $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

5. Bestem alle positive rationale talpar $(a,\, b)$ så
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\,.$$

6. Følgende solitairespil spilles på et $m \times n$ rektangulært bord, $m, n \geqslant 2$, delt i enhedskvadrater. Først placeres et tårn på et kvadrat. I hvert træk kan tårnet flyttes et vilkårligt antal felter vandret eller lodret, med den ekstra betingelse at hvert træk skal foregå i en retning drejet 90° med uret i forhold til det foregående træk (f.eks. efter et træk til venstre, skal næste træk være opad, det næste igen til højre osv). For hvilke værdier af m og n er det muligt for tårnet at besøge alle felter på bordet præcis en gang og vende tilbage til det første felt? (Tårnet har kun besøgt de felter, den lander på , og ikke de felter det springer over.)

7. Vi tegner n konvekse firkanter i planen. De deler planen i områder (et af omåderne er ubegrænset). Bestem det størst mulige antal af disse områder.

8. Lad P være en mængde af $n \geqslant 3$ punkter i planen, hvoraf ikke 3 af disse ligger på linje. På hvor mange måder kan man vælge en mænge T af $\binom{n-1}{2}$ trekanter, hvis hjørner alle ligger i P og så hver trekant i T har en side, som ikke er side i nogen anden trekant i T?

9. To kortkunstnere viser følgende trick. Den ene kortkunstner går ud af lokalet. Den anden tager en kortbunke med 100 kort nummereret $1, 2, \dots, 100$ og beder tre tilskuere efter tur vælge et kort hver. Den anden kortkunstner ser, hvilket kort hver af de tre tilskuere har taget. Så tilføjer han et kort fra restbunken. Tilskuerne blander de 4 kort, kalder på den første kortkunstner og giver ham de 4 kort. Kortkunstneren betragter de 4 kort og "gætter" hvilket kort den første tilskuer valgte, hvilket kort den anden valgte og hvilket den tredje valgte. Vis, at kortkunsterne kan lave dette trick.

10. Lad N være et positivt helt tal. To personer spiller følgende spil. Den første spiller nedskriver en liste af positive hele tal, hvoraf ingen er større end 25 og tallene er ikke nødvendigvis forskellige. Summen af tallene er mindst 200. Den anden spiller vinder, hvis han kan vælge nogle af disse tal, så deres sum S opfylder betingelsen $200 - N \leqslant S \leqslant 200 + N$. Bestem den mindste værdi af N, for hvilken den anden spiller har en vinderstrategi?

11. Lad n være et positivt helt tal. Betragt n punkter i planen så ikke tre af dem ligger på linje og ikke to afstande mellem dem er ens. Et efter et forbinder vi hvert punkt med et linjestykke til de to punkter, der ligger tættest ved punktet (hvis der allerede er tegnet linjestykker til punktet, sletter vi dem ikke). Vis, at der fra intet punkt er tegnet linjestykker til flere end 11 punkter.

12. En mænge S med fire forskellige punkter er givet i planen. Det vides, at for hvilket som helst punkt $X \in S$ kan de resterende punkter kaldes Y, Z og W så

$$|XY| = |XZ| + |XW|.$$

Vis, at alle fire punkter ligger på linje.

13. Lad ABC være en spidsvinklet trekant med $\angle BAC > \angle BCA$, og lad D være et punkt på siden AC så $|AB| = |BD|$. Lad yderligere F være et punkt påtrekant ABC 's omskrevne cirkel så linjen FD står vinkelret på siden BC og punkterne F og B ligger på hver sin side af linjen AC. Vis, at linjen FB står vinkelret på siden AC.

14. Lad L, M og N være punkter på, henholdsvis siderne AC, AB og BC i trekant ABC, så BL bliver vinkelhalveringslinjen for vinkel ABC og linjestykkerne AN, BL og CM har et fælles punkt. Vis, at hvis $\angle ALB = \angle MNB$, så er $\angle LNM = 90^\circ$.

15. En edderkop og en flue sidder på en terning. Fluen ønsker at maksimere den mindste vejlængde til edderkoppen, idet vejen ligger på terningens overflade. Er det nødvendigvis bedst for fluen at være i punktet modsat edderkoppen? (“Modsat” betyder “symmetrisk med hensyn til terningens centrum”.)

16. Bestem alle ikke-negative hele tal m, så

$$a_m = \left(2^{2m+1}\right)^2 + 1$$

er delelig med højst to forskellige primtal.

17. Vis, at talfølgen

$$\binom{2002}{2002}, \binom{2003}{2002}, \binom{2004}{2002}, \dots ,$$

betragtet modulo 2002, er periodisk.

18. Bestem alle hele tal $n > 1$, så enhver primtalsdivisor i $n^6 - 1$ også er en divisor i $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$.

19. Lad n være et positivt helt tal. Vis, at ligningen

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

ikke har løsninger, som er positive rationale tal.

20. Findes der en uendelig ikke-konstant differensrække, hvor hvert element er på formen a^b, hvor a og b er positive hele tal med $b \geqslant 2$?